Corrigés des séances 9 et 10
Chap 9: L'Energie, y compris les oscillations

Exercices

2. [I] p.351. Une masse de 1,0 kg est soulevée de 10 m par une force juste supérieure à 10 N appliquée verticalement. Quel est le travail de cette force ? Supposons maintenant qu'une force de 10 N tire horizontalement sans frottement, sur la même distance de 10 m. Quel est alors le travail ? Quel est l'état final du mouvement dans chaque cas ? (Utiliser g = 10 m.s^{-2}.)

- La force est juste supérieure au poids. Elle déplace la masse très lentement dans la direction verticale en effectuant un travail $W_1 = \int \vec{F}.d\vec{r} = F.s = 100$ N.m $= 100$ J.
- L'autre force de 10 N déplace la masse horizontalement, sans frottement, en effectuant un travail $W_2 = Fd = 100$ J.

$W_1 = W_2$ mais dans le premier cas, la force travaille contre la force de gravité. L'état final est caractérisé par une masse pratiquement au repos (car $v_f^2 = 2as$ et a est très petit), et une énergie potentielle de 100 J. Dans le deuxième cas, l'état final est caractérisé par une énergie cinétique $\frac{1}{2}mv^2 = W_2 = 100$ J. Donc, la vitesse v vaut: $v = \sqrt{2}.10$ m.s^{-1}

(9.) [I] p.351. Un coureur parcourt 50 m sur une piste horizontale en 10 s à une vitesse (presque) constante. Il subit une résistance de l'air de 1,0 N. Quelle est la puissance nécessaire pour surmonter ce frottement?

Données: $s = 50$ m, $t = 10$ s, $v =$ constante, force de frottement de l'air $F = 1,0$ N.
Puisque v est constante, la force totale sur le coureur est nulle et la force qu'exerce le coureur est égale et opposée à la force de frottement de l'air. Le travail exercé sur la distance s vaut donc $W = F.s = 50$ J. Comme v est constante, la puissance est constante et vaut $\frac{W}{t} = 5$ Watts.

70. [I] p.354. Un jeune de 60 kg court au sommet d'une falaise à une vitesse de $5,0$ m/s et saute sans se blesser dans un fleuve à $10,0$ m en dessous. Avec quelle vitesse plonge-t-il dans l'eau?

Données: $m = 60$ kg, $v_i = 5,0$ m.s^{-1}, $h_i = 10,0$ m.
L'énergie initiale $E_i = E_{c_i} + E_{p_i} = \frac{1}{2}mv_i^2 + mgh_i$ est égale à l'énergie finale $E_f = \frac{1}{2}mv_f^2$. En simplifiant par le facteur masse m, on trouve $\frac{1}{2}v_f^2 = \frac{1}{2}v_i^2 + gh_i$, et donc v_f=15 m.s^{-1}.

76. [I] p.355. Quelle est l'énergie potentielle d'un corps de $1,0$ kg sur la surface de la Terre, si nous prenons le zéro de l'énergie potentielle à l'infini?

Pour une masse m, la différence d'énergie potentielle gravitationnelle ΔE_P entre deux points situés à des distances r_f et r_i du centre de la Terre est donnée par

$$\Delta E_P = -GM_T m \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right).$$

Si l'origine est à l'infini ($r_i = \infty$), on a à la surface de la Terre ($r_f = R_T$):

$$\begin{aligned} E_P &= -\frac{GM_T m}{R_T} = (-6,67.10^{-11}\ \text{Nm}^2\text{kg}^{-2} \times 6,0.10^{24}\ \text{kg} \times 1\ \text{kg})/(6,4.10^6\ \text{m}) \\ &= -6,3.10^7\ \text{J}. \end{aligned}$$

Sachant que la force gravitationnelle à la surface terrestre est:

$$F_G = mg = \frac{GM_T m}{R_T^2},$$

l'énergie potentielle gravitationnelle à la surface de la Terre peut donc aussi s'écrire

$$E_P = -mgR_T = -1,0\ \text{kg} \times 9,8\ \text{m/s}^2 \times 6,4.10^6\ \text{m} = -6,3.10^7\ \text{J}.$$

20. [II] p.352. Pour faire descendre jusqu'au sol un tonnelet de bière de 50 kg d'un plateau de camion haut de $1,5$ m, on le fait glisser sur une planche de $3,0$ m de longueur. Quel est le travail effectué sur ce tonnelet par la pesanteur?

Seule compte la partie verticale du déplacement: $W = 50 \times 9,8 \times 1,5 = 735$ J.

(28). [II] p.352. L'oxygène que l'on respire réagit avec les graisses, les hydrates de carbone et les protéines du corps, libérant une énergie interne à un taux d'environ $2,0 \times 10^4$ J par litre. Si un homme de 70 kg a besoin d'une puissance de 77 W, même s'il dort, quelle quantité d'oxygène consomme-t-il en une heure?

La combustion d'un litre d'oxygène dans le corps humain libère une énergie $\mathcal{E} = 2,0 \times 10^4$ J. La puissance nécessaire au fonctionnement du corps est de 77 W, soit 77 J/s, ce qui correspond à une consommation d'oxyxène de $77/(2,0 \times 10^4)$ litres par seconde, ou encore 14 litres par heure.

62. [II] p.354. Un objet explose en deux fragments (il peut s'agir d'un noyau atomique qui se désintègre en émettant une particule α). Montrer que le rapport des énergies cinétiques de ces fragments est égal à l'inverse du rapport de leurs masses.

Avant et après l'explosion, les deux fragments ont la même quantité de mouvement totale, qui est nulle

$$0 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2.$$

Dès lors

$$\frac{v_1}{v_2} = -\frac{m_2}{m_1} \qquad \Rightarrow \frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{m_2^2}{m_1^2}.$$

Comme l'énergie cinétique du fragment i vaut $E_{ci} = \frac{1}{2}m_i v_i^2$, on a

$$\frac{E_{c1}}{E_{c2}} = \frac{m_2}{m_1}.$$

82. [II] p.355. A quelle vitesse devrait-on lancer une sonde spatiale à partir de la surface de la Terre, pour qu'elle voyage à une vitesse de 5,00 km/s lorsqu'elle sera très loin de la planète?

L'énergie potentielle d'une masse m à une distance r du centre de la Terre est donnée par $E_p = -\frac{GM_T m}{r}$, et son énergie cinétique vaut $E_c = \frac{1}{2}mv^2$. En l'absence de frottements, dans le champ gravitationnel, la somme $E_{tot} = E_p + E_c$ est conservée. A une distance pratiquement infinie on a:

$$E_{tot,\infty} = E_{c,\infty} = \frac{1}{2}mv_\infty^2.$$

A la surface de la Terre on a:

$$E_{tot,T} = E_{p,T} + \frac{1}{2}mv_T^2 = -\frac{GM_T m}{R_T} + \frac{1}{2}mv_T^2 = -mgR_T + \frac{1}{2}mv_T^2$$

$$E_{tot,\infty} = E_{tot,T} \qquad \Rightarrow \frac{1}{2}mv_\infty^2 = -mgR_T + \frac{1}{2}mv_T^2.$$

Donc la vitesse à la surface de la Terre doit valoir

$$v_T = \sqrt{v_\infty^2 + 2gR_T} = \sqrt{(5,00.10^3 \text{ m/s})^2 + 2.6,3.10^7 \text{ J/kg}} = 12,3 \text{ km/s}.$$

86. [II] p.355. Observé du hublot d'une station spatiale, un satellite de masse m_s, se déplaçant à la vitesse v_{si}, subit une collision frontale avec un petit astéroïde de masse m_a, qui était initialement au repos. Dans l'hypothèse où la collision est élastique et en négligeant leur interaction gravitationnelle mutuelle, quelles sont les vitesses finales v_{sf} et v_{af} des deux corps, exprimées en fonction de leurs masses et de v_{si} ? Quelle est leur vitesse relative avant et après la collision?

La collision étant supposée élastique, l'énergie mécanique totale est conservée. Comme on néglige l'interaction gravitationnelle des deux corps, l'énergie mécanique est égale à l'énergie cinétique des deux objets:

$$E_i = E_f \qquad \Rightarrow \frac{1}{2}m_s v_{si}^2 = \frac{1}{2}m_s v_{sf}^2 + \frac{1}{2}m_a v_{af}^2 \qquad (a).$$

D'autre part, la quantité de mouvement totale est conservée:

$$\mathbf{p_i} = \mathbf{p_f} \qquad \Rightarrow m_s \mathbf{v_{si}} = m_s \mathbf{v_{sf}} + m_a \mathbf{v_{af}}.$$

On dit aussi que la collision est frontale, donc après le choc, les objets se déplaceront selon la direction initiale du satellite (comme dans le cas d'une collision frontale entre 2 boules de billard):

$$m_s v_{si} = m_s v_{sf} + m_a v_{af} \qquad (b).$$

Pour trouver v_{af}, on substitue dans (a) l'expression de v_{sf} extraite de (b):

$$\begin{aligned} (b) \rightarrow v_{sf} &= \frac{1}{m_s}(m_s v_{si} - m_a v_{af}) \\ \rightarrow (a) : m_s v_{si}^2 &= \frac{1}{m_s}(m_s v_{si} - m_a v_{af})^2 + m_a v_{af}^2 \,. \end{aligned}$$

Après quelques lignes de calcul on trouve:

$$v_{af} = \frac{2v_{si}}{1 + m_a/m_s}.$$

En remplaçant v_{af} dans (b) on trouve après calcul:

$$v_{sf} = v_{si}\frac{(m_s - m_a)}{m_s + m_a}.$$

La vitesse relative du satellite par rapport à l'astéroïde avant la collision vaut

$$v_{si} - v_{ai} = v_{si},$$

et après la collision

$$v_{sf} - v_{af} = v_{si}\frac{(m_s - m_a)}{m_s + m_a} - \frac{2m_s v_{si}}{m_s + m_a} = -v_{si}.$$

Leur vitesse relative a changé de signe.

18. [I] p.483. Une masse de $5,0$ kg reposant sur un sol sans frottement est attachée à l'extrémité d'un ressort de constante d'élasticité 50 N/m. Cette masse est déplacée de 10 cm en comprimant le ressort, puis lâchée sans vitesse initiale. Quelle est sa vitesse maximale ?

La conservation de l'énergie implique que la somme des énergies potentielle et cinétique est constante. Quand la masse est lâchée à vitesse nulle, l'énergie est purement potentielle et vaut l'énergie de compression du ressort:

$$E_{P,i} = \frac{1}{2}kx^2 \,.$$

La vitesse sera maximale quand toute l'énergie de compression du ressort aura été convertie en énergie cinétique:

$$E_{c,f} = \frac{1}{2}mv_f^2 = E_{P,i} \,.$$

La vitesse maximale est donc

$$v_f = \sqrt{\frac{k}{m}}x = 0,32 \text{ m/s}.$$

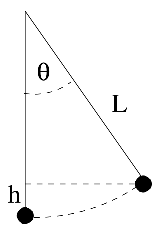
20. [I] p.483. Une masse de 250 g est attachée à un ressort hélicoïdal de constante d'élasticité 1000 N/m. On la fait osciller d'un mouvement sinusoïdal d'amplitude 20 cm. Déterminer l'énergie totale du système.

L'énergie totale du système est constante. Quand le ressort est étiré de $x = 20$ cm, la masse est au repos et l'énergie est purement potentielle. Elle vaut:

$$E_{tot} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2} \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}} \times 4.10^{-2} \text{ m}^2 = 20 \text{ Nm} = 20 \text{ J}.$$

44. [II] p.484. onsidérons un pendule simple de longueur L. Montrer que, lorsque la masse s'écarte d'un angle θ faible, elle gagne une énergie potentielle:

$$\Delta E_{PG} \approx \frac{1}{2}mgL\theta^2$$



Lorsque la masse s'écarte d'un angle θ, elle monte d'une hauteur $h = L(1-\cos\theta)$. Son énergie potentielle est donc

$$E_P = mgL(1-\cos\theta).$$

Or $(1-\cos\theta) = 2\sin^2(\frac{\theta}{2})$. D'autre part, si θ est petit, $\sin\theta \simeq \theta$. Donc

$$E_P \simeq mgL \times 2 \times \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}mgL\theta^2.$$

55. [cc] p.485. Etablir l'équation différentielle du mouvement harmonique

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

en utilisant la conservation de l'énergie.

Conservation de l'énergie: $E_{tot} = E_p + E_c$ est constante au cours du temps. Pour un ressort on a

$$E_{tot} = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

Comme E_{tot} est constante au cours du temps on a $\frac{dE}{dt} = 0$, donc

$$0 = kx\frac{dx}{dt} + m\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx\,.$$

QUESTION D'EXAMENS

1. Un camion de 7,0 tonnes arrive à la vitesse de 72 km/h au bas d'une colline de 100 m d'altitude après avoir parcouru 3,0 km depuis le sommet de la colline. Ce parcours peut-il être parcouru "en roue libre", c'est-à-dire sans utiliser le moteur? Si oui, quelle énergie a-t-elle été dissipée sous forme de frottement (freins et frottement aérodynamiques) lors de la descente? Si non, quelle énergie minimale a-t-il fallu dépenser pour arriver au pied de la colline à cette vitesse?

L'énergie potentielle du camion en haut de la colline est $E_P = mgh$, où $h = 100$m et $m = 7,0$ tonnes. L'énergie cinétique du camion en bas de la colline est $E_c = \frac{1}{2}mv^2$, où $v = 72$ km/h. La différence d'énergie est donc

$$\Delta E = mgh - \frac{1}{2}mv^2 = 7\times10^3\left(100\times10 - \frac{1}{2}20^2\right)\text{ J} = 5,6\times10^6\text{ J} > 0\,.$$

La différence étant positive, l'énergie potentielle suffisait pour que le camion arrive en bas de la pente à la vitesse donnée, sans devoir utiliser le moteur. La différence d'énergie ΔE est dissipée sous forme de frottement.

2. Une pierre de 0,10 kg suspendue à une ficelle longue de 1,0 m oscille librement, en s'écartant de la verticale d'un angle maximum de 30 degrés. Un obstacle est introduit sur le trajet de la ficelle à 50 cm sous son point de fixation, et vient contrarier les oscillations.

(a). Avant l'introduction de l'obstacle, à quelle hauteur par rapport au point le plus bas montait la pierre?

(b). Après introduction de l'obstacle, à quelle hauteur monte la pierre
- du côté où la ficelle oscille librement?
- du côté où est placé l'obstacle?

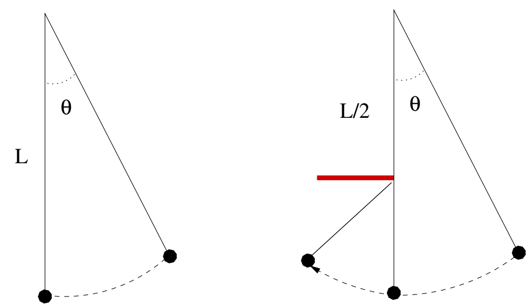
(c). Avant l'introduction de l'obstacle, quelle était la vitesse de la pierre à la verticale du point de fixation de la ficelle?

(d). Après l'introduction de l'obstacle, quelle est la vitesse de la pierre à la verticale du point de fixation de la ficelle
- quand la pierre provient du côté où la ficelle se déplace librement?
- de l'autre côté?

(a) La hauteur maximale de la pierre est donnée par

$$h_{\max} = mgL\,(1 - \cos\theta) = 0,1 \times 10 \times 1 \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0,13\text{m}.$$

(b) La pierre remonte à la même hauteur en raison de la conservation de l'énergie mécanique (potentielle + cinétique). Les points les plus hauts correspondent en effet à *la même* énergie potentielle (mgh), l'énergie cinétique y étant nulle.

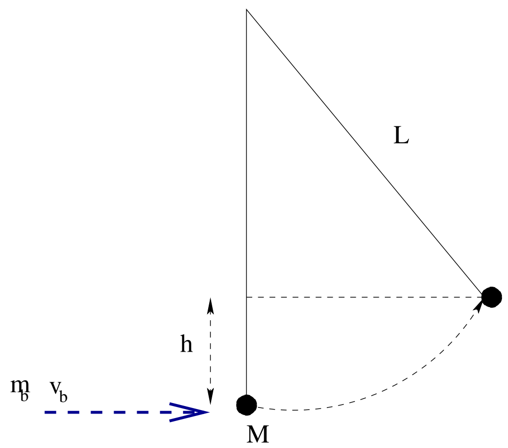


(c) Par conservation de l'énergie potentielle + cinétique, respectivement au point le plus haut et au point le plus bas:

$$mgh + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = 1,6m/s\,.$$

(d) Dans les deux cas, la pierre passera à la verticale du point de fixation à la même vitesse, toujours en raison de la conservation de l'énergie mécanique: au point le plus bas, l'énergie potentielle est complètement tranformée en énergie cinétique.

3. Une balle de fusil de 20 g, se déplaçant à la vitesse de 400 m/s, vient s'encastrer dans une boule de plomb de 2000 g suspendue à un fil de 2 m de long. De quelle hauteur va s'élever la boule de plomb?



Soient v_b la vitesse de la balle avant l'impact, v_s la vitesse du système (boule + balle) après l'impact, m_b la masse de la balle et M la masse de la boule de plomb. La conservation de la quantité de mouvement implique:

$$m_b v_b = m_s v_s \Rightarrow v_s = \frac{m_b v_b}{m_s} = \frac{m_b v_b}{M + m_b} = \frac{20 \times 400}{2020} \text{ m/s} = 4,0 \text{ m/s}.$$

L'énergie cinétique du système se transforme en énergie potentielle gravitationelle:

$$\frac{1}{2} m_s v_s^2 = m_s g h\,.$$

Dès lors

$$h = \frac{v_s^2}{2g} = \frac{16}{20} \text{ m} = 0,8 \text{ m}.$$

4. Un bloc de 2,0 kg part du repos sur un plan incliné parfaitement lisse, à une hauteur de 40 cm au-dessus du pied du plan incliné. Il glisse ensuite sur une distance de 83 cm le long d'une surface horizontale rugueuse avant de s'arrêter. Quel est le coefficient de frottement cinétique de la surface horizontale?

La première partie du mouvement est gouvernée par la force gravitationelle conservative, la deuxième par la force de frottement, non conservative. Sur l'ensemble du mouvement, l'énergie potentielle gravitationelle est complètement transformée en travail de force de frottement (puisque l'objet s'arrête, il ne reste pas de composante cinétique de l'énergie). On a donc:

$$mgh = \int \vec{F}_f \cdot d\vec{s} = \int \mu_c \left|\vec{F}_N\right| \vec{1}_s \cdot d\vec{s} = \mu_c m g d,$$

où h est la hauteur de départ et d, la distance parcourue sur la surface horizontale.

$$\Longrightarrow \mu_c = \frac{h}{d} = \frac{0,40}{0,83}\,.$$

<u>NB:</u> On peut aussi trouver ce résultat de la manière suivante. La conservation de l'énergie mécanique pendant la première partie du mouvement permet de calculer la vitesse acquise par l'objet au pied du plan incliné:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_1^2 \Longrightarrow \frac{1}{2}v_1^2 = gh\,. \tag{1}$$

Comme la force de frottement sur le plan horizontal est constante (elle ne dépend que du poids de l'objet), le mouvement y est uniformément accéléreé (ici décéléré). On a

$$v_f^2 = 0 = v_1^2 + 2ad\,.$$

Dès lors l'accélération due au frottement vaut $a = -v_1^2/2d = -gh/d$, et la force de frottement $|\vec{F}_f| = mgh/d$. Comme $F_f = \mu_c F_N = \mu_c mg$, on trouve $\mu_c = h/d$.

5. Une balle de 20 g tirée horizontalement avec une vitesse de 200 m/s est arrêtée après avoir parcouru 20 cm dans une butte de terre humide, où elle subit une décélération uniforme. Quelle quantité d'énergie a-t-elle été transférée à la butte, et quelle force moyenne a-t-elle exercé sur la butte?

Toute l'énergie cinétique de la balle a été transférée à la butte (sous forme de chaleur) par les forces de frottement qui ont arrêté la balle:

$$\Delta E_{\text{butte}} = -\Delta E_{\text{balle}} = -(0 - \frac{1}{2}mv_i^2) = -4,0 \times 10^2 \text{ J}\,.$$

Le changement d'énergie cinétique de la balle est égal au travail fourni par les forces de frottement sur la balle: $\Delta E_{\text{balle}} = \Delta W$. Par ailleurs, on sait que

$$\Delta W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = -|F| \int ds = -F\Delta s$$

car la force est constante (décélération uniforme) et s'oppose au mouvement. Comme la force est constante, elle est égale à la force moyenne exercée, et vaut donc:

$$F = -\frac{\Delta W}{\Delta s} = \frac{-\Delta E_{\text{balle}}}{\Delta s} = \frac{\Delta E_{\text{butte}}}{\Delta s} = \frac{4,0 \times 10^2}{0,2} \text{ N} = 2,0 \times 10^3 \text{ N}.$$

<u>Remarque:</u> On peut également déterminer la force exercée sur la butte de la manière suivante. La force de freinage étant constante (puisque l'accélération est constante), la deuxième loi de Newton peut s'exprimer:

$$\Delta p = F\Delta t\,. \tag{2}$$

Comme l'accélération est uniforme, on peut utiliser le théorème de la vitesse moyenne:

$$\Delta s = v_m \Delta t \qquad \text{où} \qquad v_m = \frac{v_f + v_i}{2} = 100 \text{ m/s.} \tag{3}$$

Des équations (2) et (3), on obtient:

$$\begin{aligned} F &= \frac{\Delta p}{\Delta t} = m\frac{\Delta v}{\Delta t} = m \times v_m \times \frac{\Delta v}{\Delta s} = \frac{1}{2}\frac{m\left(v_f^2 - f_i^2\right)}{\Delta s} \\ &= \frac{1}{2}\frac{20 \times 10^{-3} \times 200}{0,2} \text{ kg m/}s^2 = 2,0 \times 10^3 \text{ kg m/}s^2. \end{aligned}$$

6. Un élastique long de 40 m et dont la constante de rappel est de 1600 kg/s^2 est accroché à un pont. Un homme de 80 kg attaché à l'élastique saute du pont.

(a). Avec quelle vitesse touche-t-il le sol si l'élastique est accroché à une hauteur de 45 m au-dessus du sol?

(b). A une chute libre de quelle hauteur correspondrait cette vitesse?

On néglige la taille de l'homme; on considère que l'élastique obéit à la loi de Hooke.

(a) La conservation de l'énergie donne:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2,$$

où $x = (45 - 40)$ m est l'allongement de l'élastique. La vitesse est donc

$$v^2 = 2gh - \frac{k}{m}x^2 = 2 \times 10 \times 45 - \frac{1600}{80} \times 5,0^2 \text{ m}^2/\text{s}^2 = 400\text{m}^2/\text{s}^2.$$

$$\Longrightarrow v = 20 \text{ m/s.}$$

(b) Pour une chute libre, on aurait, par la conservation de l'énergie mécanique

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Longrightarrow h = \frac{v^2}{2g} = \frac{400}{2 \times 10} \text{ m} = 20 \text{ m.}$$