Corrigés de la séance 5
Chap 5 et 7: Gravitation et frottements

Questions pour réfléchir

Q4. p.262. Jupiter a une masse 318 fois plus grande que celle de la Terre. Pourtant, l'accélération de la pesanteur à sa surface est seulement de 26 m/s^2. Pourquoi ?

La densité (masse volumique) de Jupiter est bien plus faible que celle de la Terre. On a, à la surface de toute planète P :

$$g_P = G\frac{M_P}{R_P^2} \Rightarrow \frac{g_J}{g_T} = \frac{26}{10} = \frac{M_J}{R_J^2}\frac{R_T^2}{M_T^2} = 316\frac{R_T^2}{R_J^2} \Rightarrow \frac{R_T}{R_J} = 0.091\,.$$

Or la masse volumique est donnée par $\rho_P = M_P/V_P$ où $V_P = 4\pi R_P^3/3$ donc

$$\frac{\rho_J}{\rho_T} = \frac{M_J}{R_J^3}\frac{R_T^3}{M_T} = 316 \times (0.091)^3 = 0.24\,.$$

Q8. p.262. Le Soleil semble se déplacer par rapport aux étoiles plus rapidement en hiver qu'en été. Que peut-on en déduire concernant la distance de la Terre au Soleil à ces deux périodes de l'année ?

Par application de la loi des aires, la Terre se trouve donc plus près du Soleil en hiver qu'en été (la différence de température dans l'hémisphère Nord entre hiver et été est due à l'inclinaison de l'axe de la Terre, pas à sa proximité du Soleil).

Q13. p.262. La figure ci-dessous montre une manoeuvre qu'une fusée peut effectuer pour s' échapper d'une orbite circulaire autour d'une planète vers une trajectoire hyperbolique, quelle parcourt sans propulsion. Que faut-il faire en A ? Si le processus a lieu en sens inverse, le vaisseau arrivant en chute libre vers la planète, que faut-il faire pour passer en orbite circulaire ?

Pour s'échapper, il faut donner une accélération tangentielle dirigée dans le sens de la vitesse, de façon à augmenter la vitesse tangentielle de la fusée jusqu'à atteindre la vitesse de libération. Pour passer en orbite circulaire, il faut exercer une poussée tangentielle dans le sens opposé à la vitesse.

Exercices

1. [I] p.264. Que deviendrait le poids d'un objet si sa masse était doublée et sa distance au centre de la Terre également doublée ?

Le poids d'un objet est donné par

$$P = G\frac{mM_T}{d^2}\,.$$

Si la masse et la distance sont doublées, le numérateur est multiplié par 2, le dénominateur par 4 donc le poids est divisé par 2.

(11.) [I] p.265. Les masses des électrons et des protons sont respectivement $9,1\times10^{-31}$ kg et $1,7\times10^{-27}$ kg. Lorsqu'ils sont distants de $5,3\times10^{-11}$ m, comme dans l'atome d'hydrogène, ils s'attirent avec une force électrique F_E de $8,2\times10^{-8}$ N. Comparez cette force avec l'attraction gravitationnelle correspondante F_G. Quel est le rapport entre F_E et F_G ?

La force gravitationnelle est donnée par

$$F_G = 6,67.10^{-11}\times\frac{9,1.10^{-31}\times1,7.10^{-27}}{(5,3.10^{-11})^2} = 3,7.10^{-47}\ \mathrm{N}$$

soit $2,2.10^{39}$ fois plus faible que l'attraction électrique.

(18.) [II] p.265. Sachant que $M_L/M_T = 0,01230$ et $R_L/R_T = 0,2731$, calculer le rapport du poids d'un astronaute sur la Lune à son poids sur la Terre.

Le poids d'un corps de masse m à la surface du corps céleste C est donné par

$$P_C = G\frac{mM_C}{R_C^2} \Rightarrow \frac{P_L}{P_T} = \frac{M_L/R_L^2}{M_T/R_T^2} = \frac{M_L}{M_T}\left(\frac{R_T}{R_L}\right)^2 = 0,16\,.$$

20. [II] p.265. Déterminez la position d'un vaisseau spatial sur la droite joignant les centres de la Terre et de la Lune, où les forces exercées sur lui par ces deux corps célestes sont exactement opposées. Le vaisseau est alors sans poids.

Lorsque les deux forces d'attraction se compensent exactement, on a

$$Gm_V \frac{M_T}{d_T^2} = Gm_V \frac{M_L}{d_L^2} .$$

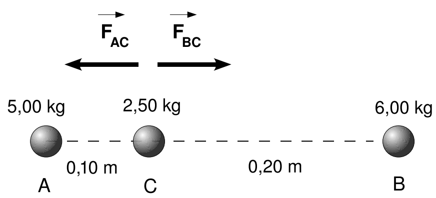
Soit x la distance entre le vaisseau et la Terre, et D la distance Terre-Lune

$$\Rightarrow \frac{M_T}{d_T^2} = \frac{M_L}{d_L^2} \Rightarrow \frac{(D-x)^2}{x^2} = \frac{M_L}{M_T} \Rightarrow \frac{D-x}{x} = \frac{D}{x} - 1 = \sqrt{\frac{M_L}{M_T}}$$

$$\Rightarrow \frac{D}{x} = 1 + \sqrt{\frac{M_L}{M_T}} \Rightarrow x = \frac{D}{1+\sqrt{\frac{M_L}{M_T}}} .$$

Comme M_L est inférieure à M_T, le dénominateur est inférieur à 2 et $x > D/2$: ce point est plus proche de la Lune que de la Terre.

(22.) [II] p.265. Trois très petites sphères, de masses respectivement 2,50 kg, 5,00 kg et 6,00 kg, sont situées sur une ligne droite dans l'espace, loin de tout autre corps. La première masse est située entre les deux autres, à 10,0 cm à droite de la seconde, et à 20,0 cm à gauche de la troisième. Calculer la force gravitationnelle subie par la première sphère.



La force gravitationnelle $\vec{F}_C$ s'exerçant sur la sphère C est la résultante des forces $\vec{F}_{AC}$ et $\vec{F}_{BC}$. Cette force est dirigée selon l'axe BA et son module est donné par

$$F_C = F_{AC} - F_{BC} = Gm_C \left(\frac{m_A}{d_{AC}^2} - \frac{m_B}{d_{CB}^2} \right)$$

$$= (6,67.10^{-11}\mathrm{N.kg^{-2}.m^2}) \times (2,50\mathrm{kg}) \Big(500\mathrm{kg.m^{-2}} - 150\mathrm{kg.m^{-2}} \Big)$$

$$= 58,4.10^{-9}\mathrm{N}$$

(45.) [I] p.267. Un satellite doit passer d'une orbite circulaire à une autre de rayon deux fois plus grand. Comment sa période est-elle modifiée ?

La force centripète qui maintient le satellite sur son orbite circulaire est l'attraction gravitationnelle. On a donc

$$m\omega^2 R = G\frac{mM_T}{R^2} \Rightarrow \omega^2 R^3 = GM_T = \mathrm{Cte}$$

avec $\omega = 2\pi/T$ où T est la période. Nous obtenons ainsi la deuxième loi de Kepler

$$\Rightarrow \frac{R^3}{T^2} = \mathrm{Cte}\,.$$

Si R est multiplié par 2, la période est donc multipliée par $2^{3/2} = 2,8$.

50. [II] p.267. Par définition, la Terre est à une distance de 1,0000 UA (unité astronomique) du Soleil. Utilisant le fait que Jupiter est, en moyenne, à 5,2028 UA du Soleil, calculez sa période en années terrestres.

D'après la deuxième loi de Kepler, T^2/R^3 est une constante, la même pour la Terre et pour Jupiter. Prenons comme unités l'année terrestre et l'UA. Nous avons

$$\frac{(1\mathrm{an})^2}{(1\mathrm{UA})^3} = \frac{T_J^2}{R_J^3} \Rightarrow \frac{T_J}{1\mathrm{an}} = \sqrt{\left(\frac{R_J}{1\mathrm{UA}}\right)^3} = \sqrt{5,2028^3} = 11,867\,.$$

La période de Jupiter autour du Soleil est de 11,867 années terrestres.

33. [III] p.266. Une étoile à neutrons, de masse de l'ordre de celle du Soleil et d'un rayon d'environ 10 km, est en fait un immense noyau atomique, soudé par sa propre gravitation. Quelle est la période de rotation de cette étoile au-dessous de laquelle elle éjecte de la matière équatoriale ? Prendre $\rho = 10^{17}$ kg / m^3.

Il faut que l'attraction gravitationnelle soit insuffisante pour assurer la force centripète nécessaire (si on se place dans le référentiel en rotation : que la “force centrifuge” soit plus grande que la force gravitationnelle), donc que

$$G\frac{mM}{R^2} < m\omega^2 R \Rightarrow \omega^2 > \frac{GM}{R^3}\,.$$

Avec $\omega = 2\pi/T$ et $\rho = M/V = M/(4\pi R^3/3) \Rightarrow M/R^3 = 4\pi\rho/3$, nous obtenons

$$\omega = \frac{2\pi}{T} > \sqrt{\frac{4\pi}{3}G\rho} \Rightarrow T < \frac{2\pi}{\sqrt{4\pi G\rho/3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4\pi}{3} \times 6,67.10^{-11}.10^{17}}}$$

$$\Rightarrow T < 1,2.10^{-3}\mathrm{s}\,.$$

(59.) [III] p.268. Io, l'une des quatre lunes de Jupiter découvertes par Galilée en 1610, a une période de 1,7699 j (jours terrestres), et elle est à une distance de 5,578 R_J (rayons de Jupiter) du centre de la planète. En déduire la densité moyenne (masse volumique) de Jupiter. Prenez $G = 6.67259 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.

La force centripète qui maintient Io sur son orbite circulaire est l'attraction gravitationnelle. On a donc, en appelant d la distance moyenne entre Io et Jupiter :

$$m_{Io}\omega^2 d = G\frac{m_{Io}M_J}{d^2} \Rightarrow \omega^2 = G\frac{M_J}{d^3} = G\frac{M_J}{(5,578R_J)^3}\,.$$

Comme $\omega = 2\pi/T$ et $\rho_J = M_J/V_J = M_J/(4\pi R_J^3/3) \Rightarrow M_J/R_J^3 = 4\pi\rho_J/3$, on a

$$\frac{(2\pi)^2}{T^2} = G\frac{4\pi}{3}\rho_J\frac{1}{5,578^3} \Rightarrow \rho_J = \frac{(2\pi)^2}{T^2}\frac{3}{4\pi G}(5,578^3) \Rightarrow \rho_J = 1048,3\,\mathrm{kg.m}^{-3}\,.$$

Remarque : (GT^2) s'exprime en N.kg^{-2}.m^2.s^2 =kg.m.s^{-2}.kg^{-2}.m^2.s^2 donc $1/(GT^2)$ a pour dimensions kg.m^{-3}.

6. [I] p.227. Un enfant de 200 N est debout, au repos, sur un plan incliné d'un angle de $24°$ par rapport à l'horizontale. Calculer la force de frottement sur ses chaussures. Quelle doit être la valeur minimum de μ_s ?

Décomposons $\vec{P}$ dans les directions $\|$ (sens positif vers le bas du plan) et $\perp$ au plan incliné (sens positif vers le haut). Imposons les conditions d'équilibre dans ces deux directions:

$$\|: P\sin\theta - F_f = 0$$

$$\perp: -P\cos\theta + N = 0.$$

Puisqu'il n'y a pas de glissement, il faut $F_f < F_f^{max} = \mu_s N$, c'est-à-dire $P\sin\theta < \mu_s P\cos\theta$. Donc $\mu_s > \tan\theta = 0,445$.

(69.) [I] p.191. Un camion transporte une caisse de bois de masse 50,0 kg. Il aborde une montée d'inclinaison $20,0°$. Y a-t-il un risque que la caisse commence à glisser, si le camion roule à vitesse scalaire constante et le coefficient de frottement statique de la caisse sur la plate-forme du camion est 0,3 ?

Similaire à l'exercice précédent. Il y a glissement si la composante du poids dans la direction $\|$ au plan incliné, $P_\| = P\sin\theta$, est supérieure à la force de frottement maximum $F_f^{max} = \mu_s P\cos\theta$, donc si $\tan\theta > \mu_s$, ce qui est le cas.

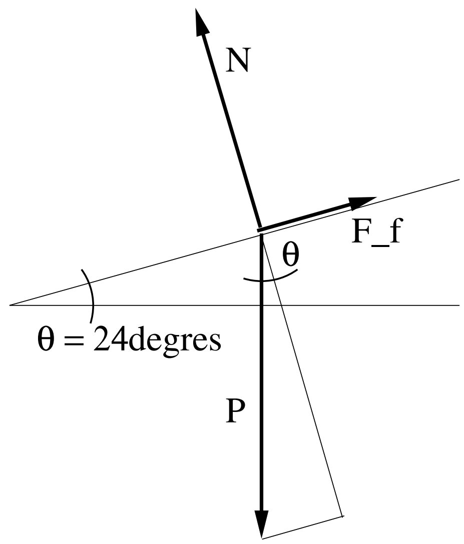


Figure P6

78. [II] p.191. Un corps de masse m est lancé avec une vitesse de 2,0 m/s sur un plan incliné à $20°$. Il glisse en ligne droite vers le haut du plan. Sachant que le coefficient de frottement cinétique est $\mu_c = 0,40$, quelle doit être la distance parcourue pour que la vitesse se réduise à 1,0 m/s ?

On cherche la distance d parcourue le long du plan incliné pour que v passe de $v_i = 2,0$ m/s à $v_f = 1,0$ m/s. On prend la direction $\vec{1}_{\|}$ positive dans la direction de la vitesse initiale.

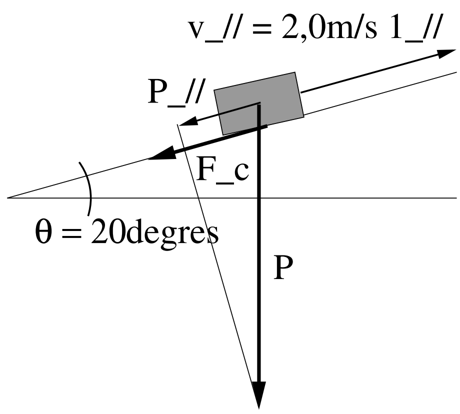


Figure P78

Par la loi de la dynamique $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$ on a dans la direction $\|$ au plan incliné:

$$m\vec{a}_{\|} = -ma\vec{1}_{\|} = -(P_{\|} + F_{cin})\vec{1}_{\|} \,,$$

avec

$$P_{\parallel} = mg\sin\theta, \qquad F_{cin} = \mu_{cin}|N| = \mu_{cin} mg\cos\theta\,.$$

D'où $\vec{a}_{\parallel} = -a\vec{1}_{\parallel}$ avec

$$a = g(\sin\theta + \mu_{cin}\cos\theta) = 7,0\mathrm{m/s}^2\,.$$

Le temps de freinage est donné par $t = (v_f - v_i)/(-a) = (1,0/7,0)$ s. La distance parcourue est égale à $s = v_i t + \frac{1}{2}(-a)t^2 = 0,21$ m.

QUESTION DE L'EXAMEN DE JUIN 2006

Une caisse de 200 kg tombe d'un camion qui descend à la vitesse de 72 km/h une route inclinée de 10^o par rapport à l'horizontale (on considère que la caisse est tombée du camion sans avoir de vitesse initiale par rapport à celui-ci).

a. Quelle est la condition pour que la caisse s'arrête à cause de son frottement sur le sol ?

b. Si la caisse parcourt une distance de 30 m avant de s'arrêter, quel est le coefficient de frottement entre la caisse et la route ?

La caisse sur le sol subit deux forces: son poids et la force de frottement. L'accélération le long de la route est la somme des composantes tangentielles de ces deux forces. En prenant l'axe selon la pente de la route et dirigé vers le bas, on a:

$$\begin{aligned} ma &= mg\sin\theta - F_f = mg\sin\theta - \mu_c N \\ &= mg\sin\theta - \mu_c N \\ &= mg\sin\theta - \mu_c mg\cos\theta \end{aligned}$$

a. Pour que la caisse s'arrête, il faut que l'accélération soit négative, c'est-à-dire:

$$\begin{aligned} sin\theta &< \mu_c\cos\theta \\ \mu_c &> \tan\theta = 0,18 \end{aligned}$$

b. La décélération étant constante, on a $v^2 = v_0^2 + 2as = 0$. Donc $a = -\frac{v_0^2}{2s}$, où v_0 est la vitesse initiale de la caisse, qui est celle du camion. Selon notre convention, s est positif. On a alors:

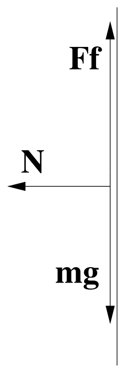
$$\begin{aligned}
\mu_c &= \tan\theta - \frac{a}{g\cos\theta} \\
&= \tan\theta + \frac{v_0^2}{2sg\cos\theta} \\
&= 0,176 + \frac{(20 \text{ m/s})^2}{2.30 \text{ m}.9,81 \text{ m/s}^2 \cos 10^o} \\
&= 0,176 + 0,690 \\
&= 0,87 \text{ (2 chiffres significatifs)}
\end{aligned}$$

QUESTION DE L'INTERRO DE NOVEMBRE 2004

Le "Rotor" de la Foire du Midi est un manège cylindrique, qui peut atteindre une vitesse d'un tour par seconde. La paroi verticale est en bois; on considère que le coefficient de frottement statique entre les vêtements des passagers et le bois est de 0,20. On veut pouvoir escamoter le plancher lorsque le "Rotor" tourne à pleine vitesse, sans danger pour les passagers.

a. Les dimensions du "Rotor" doivent-elles répondre à certaines conditions ? Si oui, lequelles ?

b. Y a-t-il une condition sur le poids maximum des passagers ?
Si oui, laquelle ?



a. Un passager de masse m subit une force centripète, due à la réaction normale de la paroi, d'intensité:

$$N = m\omega^2 R,$$

où $\omega = 1$ tour/s $= 2\pi$ rad/s est la vitesse angulaire du "Rotor" et R son rayon. La force de frottement maximale vaut:

$$F_f = \mu_s N = \mu_s m\omega^2 R.$$

Elle doit être au moins égale (et opposée) au poids:

$$\mu_s m\omega^2 R \geq mg;$$

d'où la condition sur le rayon du "Rotor":

$$R \geq \frac{g}{\mu_s \omega^2} = \frac{10 \text{ m/s}^2}{0,20.(2\pi)^2 \text{ rad/s}^2} = 1,3 \text{ m}.$$

b. Il n'y a pas de condition sur le poids des passagers (m n'apparaît pas dans l'équation).

QUESTION DE L'EXAMEN D'AOUT 2007

Un plan incliné formant un angle de $30°$ avec l'horizontale est long de 200 cm. Un bloc d'une masse de 100 g, lâché sans vitesse initiale depuis l'extrémité haute du plan, glisse sur celui-ci, le coefficient de frottement cinétique étant de 0,200. Arrivé au pied du plan, le bloc heurte de manière parfaitement élastique un bloc de même masse, au repos. Quelle est la vitesse acquise par ce dernier ?

La vitesse du bloc au pied du plan est donnée par $v^2 = v_0^2 + 2as$ où a est l'accélération du bloc, $v_0 = 0$ sa vitesse initiale, $s = 2$ m la distance parcourue. L'accélération du bloc possède

- une composante vers le bas (sens positif), due à la gravitation :

$$g.\sin(30°)$$

- une composante vers le haut, due au frottement :

$$-\mu_c F_N/m = -\mu_c mg.\cos(30°)/m = -\mu_c g.\cos(30°)\,.$$

Donc nous avons $a = g[\sin(30°) - \mu_c \cos(30°)] = 3,27\text{m.s}^{-2}$.

$$\Rightarrow v^2 = 2 \times 2\text{m} \times 4,83\text{m.s}^{-2} = 19,3\text{m}^2.\text{s}^{-2} \Rightarrow v = 3,6\text{m/s}\,.$$

Comme le choc est élastique et que les deux blocs sont de même masse, toute la quantité de mouvement du bloc descendant le plan incliné est transférée à l'autre, qui acquiert donc la vitesse de 3,6 m/s.