Corrigés de la séance 4
Chap 4: Dynamique

Questions pour réfléchir

Q5. p.185. Est-ce qu'un objet peut se déplacer dans une direction autre que celle de la force à laquelle il est soumis ? Peut-il accélérer dans une direction différente de celle de la force ?

Si nous appliquons la deuxième loi de Newton, la force $\overrightarrow{F}$ et l'accélération $\overrightarrow{a}$ d'un mobile sont liées par

$$\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}.$$

L'accélération et la force sont donc des vecteurs parallèles. La vitesse $\overrightarrow{v}$, quant à elle, est liée à l'accélération $\overrightarrow{a}$ par

$$\overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt}.$$

Cette expression impose seulement que la dérivée de la vitesse soit parallèle à la force et ne formule pas de restriction particulière sur la direction de la vitesse. Il s'ensuit donc que le mobile peut se déplacer dans une direction autre que la force à laquelle il est soumis. Le cas du mouvement circulaire uniforme en est un exemple : l'accélération est à tout instant perpendiculaire à la vitesse (qui est tangente au cercle).

Q8. p.185. Un gymnaste de 70 kg exécute un "soleil" (rotation avec bras, jambes et corps tendus) sur une barre fixe. Il subit une force de 530 N dirigée vers la barre lorsqu'il est au sommet et de 3500 N lorsqu'il est au bas du balancement. Expliquer.

Soit R le rayon du cercle décrit par le centre de gravité du gymnaste. Du point de vue du gymnaste (référentiel lié au gymnaste), c'est comme si deux forces s'exerçent sur lui: son poids, et la force centrifuge. Lorsqu'il est au sommet de la trajectoire, les forces sont dirigées dans des sens opposés. Lorsqu'il est en bas, les forces s'additionnent.

NB: on peut aussi analyser le problème dans un référentiel inertiel lié au sol. Le gymnaste subit une force centripète $F_c = mv^2/R$ qui le fait tourner autour de la barre. Cette force est la résultante de son poids et de la force transmise par ses bras. Au sommet de la rotation, la vitesse est faible, donc la force centripète est faible. On a, en prenant le sens positif des forces vers le sol:

$$\frac{mv^2}{R} = 530 \text{ N} = P + F_{bras}$$

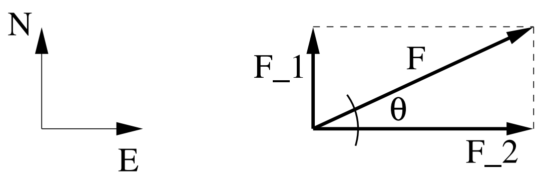
Comme $P = mg = 700$ N, les bras exercent une force négative, donc vers le haut: les bras sont en compression. Au bas de la rotation, la vitesse est élevée, donc la force centripète est grande. On a:

$$\frac{mv^2}{R} = 3500 \text{ N} = P + F_{bras} \,.$$

Donc $F_{bras} = 2800$ N et les bras sont en traction.

Exercices

4. [I] p.187. Un papa de 100 kg debout sur de l'herbe glissante est tiré à hue et à dia par ses deux enfants turbulents. L'un l'entraîne vers le marchand de glace situé au nord avec une force de 50 N, l'autre le hale vers la piscine en direction de l'est avec une force de 120 N. En négligeant les frottements, calculez l'accélération résultante du papa.



Les deux forces peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\vec{F}_1 = 50\ \vec{1}_{\text{N}}$$
$$\vec{F}_2 = 120\ \vec{1}_{\text{E}} \,.$$

L'accélération résultante est calculée par la deuxième loi de Newton :

$$\vec{F} = m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \,.$$

Le module a et la direction θ de l'accélération $\vec{a}$ sont donnés par

$$a = \frac{\sqrt{50^2 + 120^2}\ \text{N}}{100\ \text{kg}} = 1,3\ \text{m/s}^2$$

$$\tan\theta = \frac{F_1}{F_2} \Rightarrow \theta = 23^\circ\ \text{ par rapport à l'Est.}$$

16. [c] p.187. La vitesse d'une taupe de $0,10$ kg, qui se déplace dans un tunnel, est donnée par $v(t) = At^3 - Bt^2$, où A et B sont des constantes. Quelle est la force tangentielle exercée sur cette taupe à l'instant $t = 10$ s ? Négliger la résistance de l'air.

La composante tangentielle F_t de la force résultante est donnée par

$$F_t = ma_t \, .$$

L'accélération tangentielle a_t se calcule via

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 3At^2 - 2Bt.$$

En $t = 10$ s, F_t vaut par conséquent

$$F_t = 30A - 2B \, .$$

(6.) [I] p.187. L'accélération gravitationnelle sur la surface de Mercure est $0,38$ fois sa valeur sur Terre. Quel est le poids d'un corps de $1,0$ kg sur cette planète ?

Si l'accélération gravitationnelle sur Terre vaut $g_T = 10$ m/s^2, celle sur Mercure vaut $g_M = 0,38 g_T = 3,8$ m/s^2. Le poids correspondant pour un corps de masse 1 kg est $P_M = mg_M = 3,8$ N.

2. [II] p.187. On considère deux barreaux aimantés de masses $1,0$ kg et $2,0$ kg respectivement. Leurs extrémités de même polarité ont une force d'interaction répulsive. On les presse l'un contre l'autre puis on les lâche. En l'absence de frottement, le barreau le plus lourd s'éloigne de l'autre avec une accélération initiale de $10,0$ m/s^2 vers le nord. Quelle est l'accélération initiale de l'autre barreau ?

En vertu de la troisième loi de Newton (action-réaction), les forces qui s'exercent sur les deux barreaux sont égales mais de sens opposé. Leur module vaut $2,0$ kg $\times$ $10,0$ m/s^2 $= 20$ N. Le module de l'accélération du deuxième aimant est donc donné par

$$a = \frac{20 \text{ N}}{1,0 \text{ kg}} = 20 \text{ m/s}^2.$$

28. [II] p.189. En 1784, George Atwood a publié la decription d'un dispositif pour "diluer" l'effet de la pesanteur, facilitant ainsi la détermination de g. La Fig. P28 illustre cet appareil : deux masses sont attachées aux extrémités d'une corde de masse négligeable qui passe dans la gorge d'une poulie de masse et de frottement négligeables. Montrer que, si $m_2 > m_1$, les deux masses ont une accélération :

$$a = \frac{(m_2 - m_1)}{(m_2 + m_1)} g$$

Montrer que la tension de la corde est

$$F_T = \frac{2m_1 m_2}{(m_2 + m_1)} g$$

Quelle est la valeur de a si $m_2 = 2m_1$? Dans quelles conditions a est nulle? Déterminer a si $m_2 \ggg m_1$.

Écrivons d'abord les équations du mouvement des deux masses séparément (sens positif des vecteurs vers le haut):

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= F_{T_1} - m_1 g \\ m_2 a_2 &= F_{T_2} - m_2 g \,. \end{aligned}$$

La corde (de masse négligeable et inextensible) et la poulie (d'inertie et frottements négligeables) relient les mouvements de ces deux masses:

$$\begin{aligned} a_1 &= -a_2 \equiv a \\ F_{T_1} &= F_{T_2} \equiv F_T \,. \end{aligned}$$

En éliminant la tension des deux équations du mouvement, nous obtenons

$$a = \frac{(m_2 - m_1)}{(m_2 + m_1)} g \,.$$

Il en résulte également que

$$F_T = m_1 a + m_1 g = m_2 a + m_2 g = \frac{2m_1 m_2}{(m_2 + m_1)} g \,.$$

Dans le cas où $m_2 = 2m_1$, l'accélération se simplifie en $a = g/3$. Le système reste au repos si $m_2 = m_1$. Dans le cas où $m_2 \ggg m_1$, l'accélération se simplifie en $a \simeq g$: la masse m_2 est alors soumise uniquement à son propre poids.

(22.) [II] p.188. Lors de son premier vol en 1981, la navette spatiale Columbia faisait partie d'un ensemble de $2,0 \times 10^6$ kg, d'une hauteur de 18 étages et qui développait une poussée totale de près de $2,85 \times 10^7$ N. (a) Quelle était son accélération initiale à pleine puissance ? (b) selon des rapports de presse, $6,0$ s après sa mise à feu, quand elle s'est dégagée de la tour de soutien haute de $105,8$ m, elle avait une vitesse de $33,5$ m/s. Est-ce que ces rapports sont corrects ? A quelle accélération moyenne cela correspond-il ? (c) Comparez ces valeurs de l'accélération et proposez une explication à la différence, s'il y en a une. ($g = 9,81/, m/s^2$)

(a) Si nous désignons par $\vec{F}$ la poussée développée par les moteurs de la navette spatiale, la deuxième loi de Newton donne

$$m\vec{a} = \vec{F} + m\vec{g}\,.$$

En projetant selon un axe vertical orienté dans le sens du mouvement de la navette, nous avons

$$ma = F - mg = 2.85\,.10^7 \text{ N} - 1,96\,.10^7 \text{ N} = 0.889\,.10^7 \text{ N}$$

donc l'accélération vaut (2 chiffres significatifs)

$$a = 4,44 \text{ m/s}^2 \simeq 4,4 \text{ m/s}^2\,.$$

(b) Si nous intégrons les équations du mouvement,

$$v\left(t\right) = at$$
$$z\left(t\right) = \frac{1}{2}at^2.$$

Donc

$$v\left(t=6\right) = \left(4,44 \text{ m/s}^2\right) \times \left(6,0 \text{ s}\right) = 26,64 \text{ m/s} \simeq 27 \text{ m/s}$$
$$z\left(t=6\right) = 0,5 \times \left(4,44 \text{ m/s}^2\right) \times \left(6,0 \text{ s}\right)^2 = 79.92 \text{ m} \simeq 80m$$

(c) Ce calcul indique donc qu'après 6,0 s, la navette ne se serait pas entièrement dégagée de la tour de lancement, et que sa vitesse serait inférieure à 33,5 m/s. Pourtant les comptes-rendus sont corrects. La différence est attribuable au fait que, dans le calcul ci-dessus, on n'a pas tenu compte de la diminution de la masse de la fusée au fur et à mesure que le carburant est consommé.

36. [III] p.189. Un bloc de 10,0 kg est placé au repos au pied d'un plan incliné à $20,0°$. Un second bloc identique est lâché sur ce plan incliné sans vitesse initiale, à une distance de 10,0 m du premier bloc. Il glisse sur le plan et vient frapper le premier. Ensuite, les deux blocs se collent et se déplacent ensemble horizontalement. En négligeant tout frottement, calculez leur vitesse finale.

L'accélération du bloc dans la première phase du mouvement correspond à la composante de $\overrightarrow{g}$ parallèle au plan incliné :

$$a = g\,\sin(20°)\,.$$

La distance parcourue d et la vitesse v_1 au bas du plan sont liées par (pas de vitesse initiale)

$$v_1^2 = 2ad = 20g\,\sin(20°)$$

La vitesse v_2 dans la seconde phase du mouvement est donnée par la conservation de la quantité de mouvement :

$$m\,v_1 = 2\,m\,v_2 \Rightarrow v_2 = 0,5 \times \sqrt{20g\,\sin(20°)} = 4,14 \text{ m/s}.$$

46. [I] p.190. Calculer l'accélération centripète de la Terre sur son orbite autour du Soleil, considérée comme circulaire. On prendra l'année (temps nécessaire pour parcourir l'orbite) égale à 365 jours et le rayon moyen de l'orbite, égal à $1,50 \times 10^8$ km.

L'accélération centripète est donnée par

$$a = \frac{v^2}{R} = R\omega^2 = 1,50\,.10^{11} \times \left(\frac{2\pi}{365 \times 24 \times 3600}\right)^2 = 5,95\,.10^{-3} \text{ m/s}^2\,.$$

58. [II] p.190. Supposons que vous faites tourner un seau plein d'eau sur un cercle dans un plan vertical, que votre bras a $0,90$ m de longueur (de l'épaule au poing) et que la distance de la poignée à la surface de l'eau est $20,0$ cm. Quelle doit être la vitesse minimum pour que l'eau ne tombe pas du seau ?

La vitesse minimum correspond à une force centrifuge qui compense le poids de l'eau. Dans ce cas,

$$m\frac{v^2}{R} = mg$$

soit

$$v = \sqrt{Rg} = \sqrt{1,1 \text{ m} \times 10 \text{ m/s}^2} = 3,3\,\text{m/s}$$

45. [III] p.190. Un joueur de base-ball parcourt un arc de cercle de rayon de courbure 4,88 m à une vitesse de 6,1 m/s. Quelle est la force centripète qui agit sur lui, s'il pèse 845 N ? Quelle est l'origine de cette force centripète ? Y a-t-il une limite inférieure au rayon de courbure de sa course et pourquoi ?

La masse m du joueur vaut $m = (845\text{ N})/(10\text{ m/s}^2) = 84,5\text{ kg}$. La force centripète est donnée par

$$ma = m\frac{v^2}{R} = (84,5\text{ kg}) \times \frac{(6,1\text{ m/s})^2}{4,88\text{ m}} = 644,31\ \text{ N} \simeq 644\text{ N}\,.$$

Les forces de frottement entre le sol et les semelles de ses chaussures sont à l'origine de la force centripète. Pour une vitesse donnée, il existe une valeur minimum du rayon de courbure R en-dessous de laquelle il n'y a plus d'adhérence au sol. En effet, la force centripète est inversément proportionnelle au rayon de courbure ($ma = mv^2/R$). Elle doit être fournie par le frottement des chaussures sur le sol, qui vaut au maximum $F_s^{max} = \mu_s P$, où μ_s est le coefficient de frottement statique et P le poids du joueur. Donc la condition sur le rayon de courbure de la trajectoire est donnée par

$$m\frac{v^2}{R} = F_s \leq \mu_s mg \qquad \Rightarrow R \geq \frac{v^2}{\mu_s g}\,.$$

QUESTION DE L'INTERRO DE NOVEMBRE 2005

Un avion décrit dans le plan vertical un looping selon une trajectoire circulaire. Alors que le pilote, de 80 kg, est au sommet de sa trajectoire, la tête en bas, la vitesse de l'avion est de 360 km/h, et la force que le pilote exerce sur son siège est 1/3 de son poids. Quel est le rayon de la trajectoire ?

Au sommet de la trajectoire, la résultante des forces exercées sur le pilote est une force centripète dirigée vers le bas, égale à mv^2/R, où v = 360 km/h = 100 m/s. A ce moment s'exercent sur le pilote:

- la force de gravité mg, dirigée vers le bas;
- la force de réaction exercée sur lui par son siège, qui vaut $\frac{1}{3}mg$ et est également dirigée vers le bas.

On a donc:

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{4}{3}mg \qquad \Rightarrow R = \frac{3}{4}\frac{v^2}{g} = \frac{3}{4}\frac{10^4}{10} = 750\text{ m.}$$