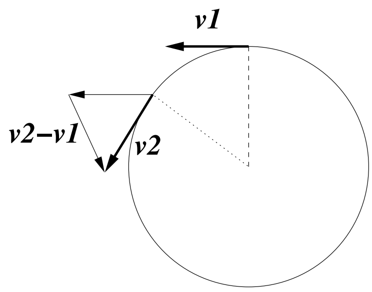
Corrigés de la séance 2
Chap 3: Cinématique - accélération

Questions pour réfléchir

Q4 p.106. Oubliant le mouvement propre de la planète, pourquoi peut-on dire que tout objet qui se déplace d'une distance appréciable sur la surface de la Terre est accéléré?

Parce que la surface de la Terre n'est pas plate. Le vecteur vitesse de l'objet en mouvement change de direction; il y a donc accélération.



Q11. p.106. Supposons que vous êtes dans un ascenseur en chute libre et que vous laissez tomber vos clés sans vitesse initiale juste devant vos yeux. Expliquez ce qui arrive à ces clés.

Le trousseau de clés restera devant vos yeux tout le long de la chute. Considérons ce qui se passe depuis un référentiel inertiel immobile extérieur à l'ascenseur. Les clés sont lâchées avec une vitesse initiale v_0 égale à celle du passager au moment du lâcher. Puis elles tombent en chute libre. Elles subissent donc une accélération g identique à celle du passager et de l'ascenseur, qui tombent eux aussi en chute libre. Donc en tout instant l'altitude du passager et des clés restent les mêmes.

2. [1] p.107. Un oiseau migrateur est observé à 14 h 02 min se dirigeant vers le sud à une vitesse de 50 km/h. A 14 h 06 min, il est observé toujours dirigé vers le sud mais avec une vitesse de 40 km/h. Calculer son accélération moyenne sur cette période.

$$\left\{\begin{array}{lcl} t_1 & = & 14 \text{ h } 02 \text{ min} \\ t_2 & = & 14 \text{ h } 06 \text{ min} \end{array}\right. \quad \& \quad \left\{\begin{array}{l} \vec{v}_1 = 50 \text{ km/h } \vec{1}_S \\ \vec{v}_2 = 40 \text{ km/h } \vec{1}_S \end{array}\right.$$

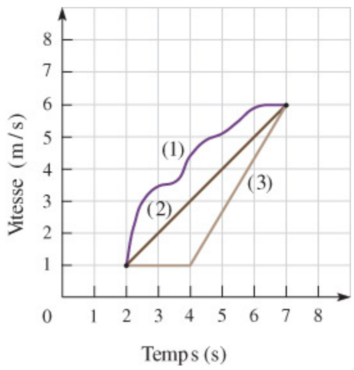
où $\vec{1}_S$ est un vecteur d'unité dirigé vers le sud.

$\Delta t = t_2 - t_1 = 4$ min = 1/15 h. La différence de vitesses est $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = -10$ km/h $\vec{1}_S$.

L'accélération moyenne est donnée par

$$\vec{a}_\text{m} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{-10 \text{ km/h } \vec{1}_S}{(1/15) \text{ h}} = -150 \text{ km/h}^2\vec{1}_S = -0,012 \text{ m/s}^2\vec{1}_S$$

18. [II] p.108. La figure P18 est une représentation graphique de la vitesse scalaire en fonction du temps pour trois cyclistes. Décrire leurs mouvements et calculer leur accélérations moyennes sur tout l'intervalle (de temps) considéré.



<u>mouvement (2)</u>: la vitesse augmente linéairement avec le temps $\Rightarrow$ l'accélération instantanée est constante et vaut l'accélération moyenne.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{(6-1) \text{ m/s}}{(7-2) \text{ s}} = 1 \text{ m/s}^2$$

mouvement (3): vitesse constante pendant 2 s, puis accélération constante pendant 3 s. Comme les vitesses de départ et d'arrivée sont les mêmes que pour le mouvement 2, l'accélération moyenne sur l'intervalle de temps $[2,7]$ s est aussi la même.

mouvement (1): accélération instantanée variable sur $[2,7]$ s, mais même accélération moyenne que pour les autres mouvements.

(27.) [cc] p.109. Une souris se déplace le long d'un tube de verre droit selon l'équation $s(t) = \left(0,10\text{m/s}^3\right) t^3 - \left(0,60\text{m/s}^2\right) t^2 + (0,90\text{m/s})\, t$ où s est mesuré à partir de l'extrémité du tube. (a) Déterminer la valeur algébrique de la vitesse à tout instant t. (b) Quelles sont les valeurs algébriques de la vitesse aux instants t =1,0s, 2,0s et 4,0s ? (c) A quel instant la souris est-elle au repos?

(a) La vitesse est la dérivée de s par rapport à t:

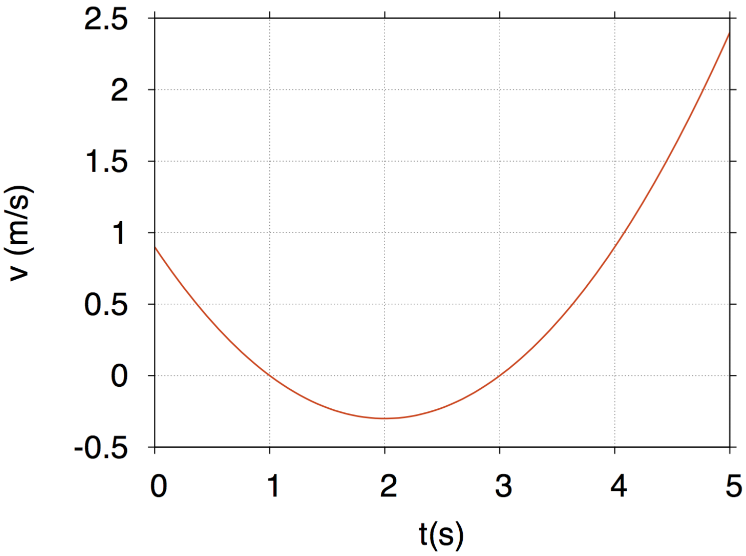
$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 0,30t^2 - 1,20t + 0,90;$$

$$\boxed{\text{pour rappel: } \frac{d}{dt}t^m = mt^{m-1}}$$

(b) Les valeurs de la vitesse sont:

v	t
0 m/s	1,0s
-0,30 m/s	2,0s
0,90 m/s	4,0s

Le graphique de la vitesse en fonction du temps est:



(c) La souris est au repos quand $v = 0$. On sait de la question (b) que pour $t = 1$s, la vitesse est nulle, mais $v(t)$ étant un polynôme de second degré il y a 0, 1 ou 2 solutions réelles:

$$t_{1,2} = \frac{-(-1,20) \pm \sqrt{(-1,20)^2 - 4 \times 0,30 \times 0,90}}{2 \times 0,30} = 1s \text{ et } 3s$$

La souris est donc au repos aux instants $t = 1$s et $t = 3$s.

24. [III] p.109. Deux motocyclistes roulent directement l'un vers l'autre. Chacun s'est lancé de l'arrêt avec une accélération constante de 5,5 m/s^2. A quelle vitesse s'approchent-ils l'un vers l'autre après 2,0s? A cet instant, quelle distance ont-ils parcourue depuis leur point de départ?

Si m_1, m_2 sont les deux motocyclistes, a leurs accélérations, leurs vitesses sont données par

$$\begin{cases} v_{m_1} & = & at \\ v_{m_2} & = & -at \end{cases}$$

la vitesse relative de m_2 par rapport à m_1 est

$$\Delta v = v_{m_2} - v_{m_1} = -2at = -11t \left[\frac{m}{s}\right]$$

à $t = 2s$, $\Delta v = -22$ m/s = 79 km/h. Ils ont chacun parcouru $d = \frac{1}{2}at^2 = 0,5 \times 5,5 m/s^2 \times 4s^2 = 11m$.

40. [I] p.109. Un kangourou peut sauter verticalement à une hauteur de 2,5m. Quelle est sa vitesse de décollage?

Dans le cas d'un mouvement uniformément accéléré, la distance parcourue s et les vitesses initiale v_i et finale v_f sont liées par

$$v_f^2 = v_i^2 + 2as.$$

Au sommet du saut, $v_f = 0$ m/s. La vitesse initiale vaut donc

$$v_i = \sqrt{2 \times g \times 2,5\text{m}} = 7,1\text{m/s}.$$

NB: on peut aussi résoudre l'exercice en partant des équations du mouvement du kangourou:

$$\begin{cases} v(t) & = & v_i - gt \\ z(t) & = & v_i t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

où v_i est sa vitesse de décollage et l'axe des z est orienté vers le haut. On sait aussi que

- $z_{\text{max}} = z(t_{\text{max}}) = 2,5\text{m}.$
- Au moment où le kangourou atteint ces 2,5m, sa vitesse doit être nulle, car il inverse son mouvement et retombe au sol $\Rightarrow v(t_{\text{max}}) = 0.$

On remplace ces deux informations dans les équations de la vitesse et du déplacement:

$$v(t_{\text{max}}) = 0 = v_i - g t_{\text{max}} \qquad \Rightarrow t_{\text{max}} = \frac{v_i}{g}$$

et

$$z_{\text{max}} = 2,5m = 0 + v_i \left(\frac{v_i}{g}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_i}{g}\right)^2 \qquad \Rightarrow 2,5m = \frac{1}{2}\frac{v_i^2}{g} \quad \Rightarrow v_i = 7,1\text{m/s}$$

44. [I] p.110. En roulant à 80 km/h un jour de brouillard, où la visibilité est seulement de 80 m, le conducteur voit brusquement une voiture arrêtée au milieu de la route à cause d'un accident. Quelle doit être sa décélération pour éviter la collision avec cette voiture?

- $v_i = 80$ km/h; $v_f = 0$ km/h (arrêt)
- visibilité = 80m = distance maximale d'arrêt

En utilisant la formule $v_f^2 = v_i^2 + 2as$, on trouve immédiatement:

$$a = -\frac{v_i^2}{2s} = -\frac{80^2}{2 \times 0,080} = -4,0 \times 10^4 \text{ km/h}^2 = -3,1 \text{m/s}^2.$$

NB: on peut aussi résoudre l'exercice en partant des équations du mouvement:

$$\begin{cases} v(t) &= v_i + at \\ x(t) &= v_i t + \frac{1}{2}at^2 \end{cases}$$

Quand la voiture a complètement freiné, $v(t_{\text{arrêt}}) = 0 \;\Rightarrow 0 = v_i + at_{\text{arrêt}}$, c.à.d.

$$t_{\text{arrêt}} = \frac{-v_i}{a}$$

On veut qu'au maximum, la voiture s'arrête après une distance de 80 m, donc

$$0,080 \text{ km} = v_i t_{\text{arrêt}} + \frac{1}{2}at_{\text{arrêt}}^2 = -\frac{v_i^2}{2a}$$

On obtient ainsi la décélération

$$a = -\frac{80^2}{2 \times 0,080} = -4 \times 10^4 \text{ km/h}^2 = -3,1 \text{ m/s}^2.$$

Le temps d'arrêt est $t_{\text{arrêt}} = 7,2s$.

77. [I] p.111. Supposons que vous pointiez un fusil horizontalement exactement vers le centre d'une cible située à une distance de 100m. Si la vitesse de la balle au sortir du canon est de 1000 m/s, où frappe-t-elle la cible? (On suppose que les effets aérodynamiques sont négligeables).

Le mouvement se fait en deux dimensions. Dans la direction $\vec{1_x}$ il n'y a pas de frottement ni d'accélération. Dans la direction $\vec{1_z}$ dirigée vers le haut, la balle est soumise à la pesanteur terrestre: $\vec{g} = -g\vec{1_z}$.

$$\begin{cases} v_x &= v_{0x} \\ v_z &= v_{0z} - gt \end{cases}$$

Le déplacement est

$$\begin{cases} x &= v_{0x}t + x_0 \\ z &= z_0 + v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

On choisit le référentiel suivant: $x_0 = 0$, $z_0 = 0$ et l'énoncé nous donne les valeurs initiales des vitesses: $v_{0x} = 1000$ m/s, $v_{0z} = 0$.
Le temps de vol t_{vol} est déterminé par le mouvement horizontal:

$$\Delta x = v_{0x} t_{\text{vol}} \qquad \Rightarrow t_{\text{vol}} = \frac{\Delta x}{v_{0x}} = \frac{100}{1000}\text{s} = 0,1\text{s}$$

Le déplacement vertical vaut donc $-\frac{1}{2}gt_{\text{vol}}^2 = -0.5 \times 10 \times 0,1^2 = -0,05m$. La balle touche la cible 5 cm sous le centre de celle-ci.

(67.) [I] p.111. Vous tombez d'une chaise haute de 0,50m. Négligeant la résistance de l'air, à quelle vitesse heurtez-vous le plancher?

Equations du mouvement ($\vec{1_z}$ dirigé vers le haut, $\vec{g} = -g\vec{1_z}$, $g = 10$ m/s^2):

$$\left\{ \begin{array}{lcl} v_z & = & v_{0z} - gt \\ z & = & z_0 + v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{array} \right.$$

Conditions initiales:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} v_{0z} & = & 0 \\ z_0 & = & 0,5\text{m} \end{array} \right.$$

Temps de chute:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_z(t_{\text{chute}}) = -gt_{\text{chute}} \\ 0 = 0.5 - \frac{1}{2}10(t_{\text{chute}})^2 \end{array} \right. \Rightarrow t_{\text{chute}} = \sqrt{2(0,5)/10} = 0,32s$$

et la vitesse au moment où on touche le plancher $v_z(t_{\text{chute}}) = -10 \times 0,32 = -3,2$ m/s.

(82.) [I] p.111. L'attraction gravitationnelle à la surface de la Lune est d'environ $g/6$. Si une balle lancée verticalement atteint une hauteur de 25m sur Terre, quelle hauteur atteint-elle sur la Lune, si elle est lancée à la même vitesse? Négliger les effets de la résistance de l'air.

Prenons $\vec{1_z}$ dirigé vers le haut, $\vec{g} = -g\vec{1_z}$, $g = 10$ m/s^2. Au temps t_{max} où la balle s'arrête on a:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = v_0 - gt_{\text{max}} \\ h_{\text{max}} = v_0 t_{\text{max}} - \frac{1}{2}gt_{\text{max}}^2 \end{array} \right. \qquad \Rightarrow t_{\text{max}} = \frac{v_0}{g} \Rightarrow h = \frac{v_0^2}{2g}$$

donc

$$\left\{ \begin{array}{lcl} h_{\text{L}} & = & v_0^2/(2g_L) \\ h_{\text{T}} & = & v_0^2/(2g_T) \end{array} \right. \text{ mais } g_L = g_T/6 \Rightarrow h_{\text{L}} = 6\frac{v_0^2}{g_T} = 6v_0^2\left(\frac{h_{\text{T}}}{v_0^2}\right) = 6h_{\text{T}}$$

$\Rightarrow h_{\text{L}} = 6 \times 25 = 150\text{m}.$

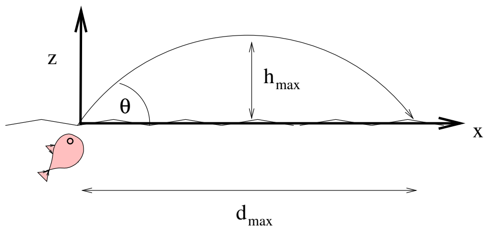
49. [II] p.110. Un conducteur conduisant à 60 km/h voit un animal sauter sur la route; il freine. Son accélération étant -7 m/s^2, il s'arrête après avoir parcouru 23,3m. Quel était son temps de réaction ?

Avant que le conducteur ne réagisse, la voiture roule à vitesse constante. Pendant le freinage, la voiture décélère uniformément à -7m/s^2. La distance de freinage est donnée par

$$d_{freinage} = \frac{v_0^2}{2a} = 19,8\text{m}.$$

La distance parcourue à vitesse constante avant de réagir vaut $d_{\text{réaction}} = 23,3\text{m} - 19,8\text{m} = v_0 t_{\text{réaction}}$. Donc $t_{\text{réaction}} = \frac{3{,}5\text{m}}{16{,}7\text{m/s}} = 0,21\text{s}$.

(100.) [II] p.112. Le saumon, nageant pour revenir à sa zone de reproduction, bondit au-dessus de toutes sortes d'obstacles. Le record de saut en hauteur atteint par ce poisson est de 3,45m. Supposant qu'il saute à 45^o, quelle est sa vitesse à la sortie de l'eau?



Le mouvement est en deux dimensions. Dans la direction z on a un mouvement uniformément décéléré, donc

$$v_z^2 = v_{0z}^2 - 2gh_{max}.$$

On trouve $v_{0z} = \sqrt{2 \times 9,81 \times 3,45} = 8,23\text{m/s}$. Le module du vecteur vitesse vaut donc $|\vec{v}| = v_{0z}/\sin\theta = 11,6\text{m/s}$.

NB: On peut aussi résoudre l'exercice à partir des équations du mouvement:

$$\begin{cases} x(t) &= v_{0x} t \\ z(t) &= v_{0z} t - 1/2 g t^2 \end{cases}$$

On projette le vecteur vitesse initiale sur les axes x et z:

$$\begin{aligned} \vec{v_0} &= v_{0x}\vec{1_x} + v_{0z}\vec{1_z} \\ &= |\vec{v_0}|\left(\cos\theta\vec{1_x} + \sin\theta\vec{1_z}\right) \end{aligned}$$

où $\theta = 45^o$. On a donc $v_{0x} \equiv v_{0z} = v_0/\sqrt{2}$.

On détermine la hauteur maximale en imposant $v_z(t_{\text{max}}) = 0$:

$$v_z(t_{\text{max}}) = 0 = v_{0z} - g t_{\text{max}} \Rightarrow t_{\text{max}} = \frac{v_{0z}}{g} = \frac{v_0}{\sqrt{2}g}$$

La hauteur maximale est de 3,45m, ce qui implique une vitesse initiale de

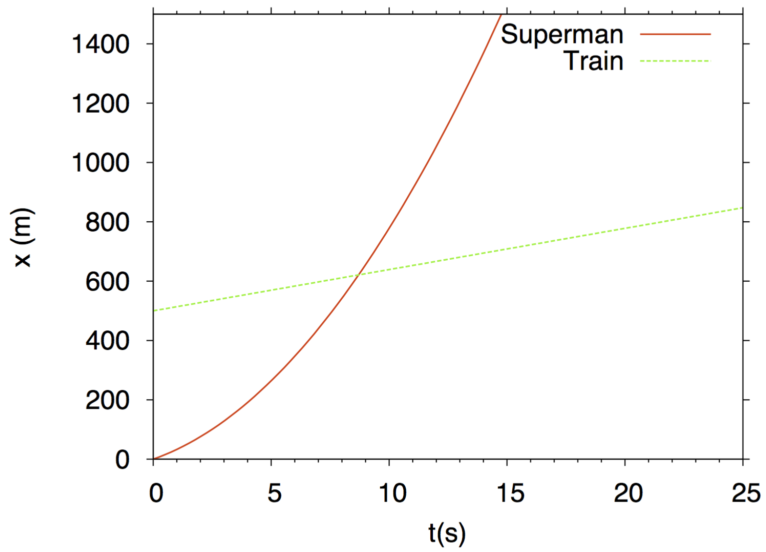
$$h_{\text{max}} = 3,45 = v_{0z} t_{\text{max}} - \frac{1}{2} g t_{\text{max}}^2 = \frac{v_0^2}{4g} \Rightarrow v_0 = \sqrt{4 g h_{\text{max}}} = 11,6\text{m/s}$$

65. [III] p.111. Superman court le long de la voie ferrée à la vitesse de 100km/h. Il atteint l'arrière d'un train de marchandises de longueur 500m roulant à 50 km/h. A ce moment-là il accélère à 10m/s^2. Quelle distance parcourt le train jusqu'à ce que Superman atteigne la locomotive ?

Les positions respectives de Superman (S) et de la locomotive (T) sont

$$\begin{cases} x_\mathrm{S} & = & v_{0S}t + \frac{1}{2}a_\mathrm{S}t^2 \\ x_\mathrm{T} & = & v_{0T}t + L_\mathrm{T} \end{cases}$$

où $L_\mathrm{T} = 500$m, $v_{0S} = 100$ km/h = 27,8 m/s, $a_\mathrm{S} = 10$m/s^2 et $v_{0T} = 13,9$ m/s. Les distances parcourues en fonction du temps sont représentées à la figure ci-dessous.



L'intersection des deux courbes correspond au moment où Superman atteint l'extremité de la locomotive. Les courbes se croisent à t_C et $x_S(t_C) = x_T(t_C)$, c.à.d.

$$v_{0S}t_C + \frac{1}{2}a_\mathrm{S}t_C^2 = L_\mathrm{T} + v_{0T}t_C \Rightarrow 5,00t_C^2 + 13,9t_C - 500 = 0$$

La solution générale d'une équation de deuxième ordre est

$$\boxed{at^2 + bt + c = 0 \Rightarrow t = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

Pour $a = 5,00, b = 13,9, c = -500$, la solution est $t_C = 8,7$s.

La distance parcourue par le train en ces t_C secondes est $\Delta x_T = v_{0T}t_C = 121$m.

QUESTION DE L'EXAMEN DE JANVIER 2006

Une personne a lâché un pétard du haut d'une tour, et l'a entendu exploser 5,00 s plus tard. La vitesse du son étant de 330 m/s et l'accélération de la gravitation g = 9,81 m/s^2, de combien était tombé le pétard avant d'exploser ? (négligez les frottements).

La hauteur de chute du pétard avant l'explosion est donnée par $h = 1/2gt_1^2$, où t_1 est le temps de chute du pétard. La même hauteur de chute est parcourue à vitesse constante par le son: $h = v_s t_2$, où t_2 est le temps mis par le son pour atteindre la personne. Le temps total écoulé est $T = t_1 + t_2 = 5,00$ s.

On a donc:

$$\begin{aligned}
h &= \frac{1}{2}gt_1^2 = v_s(T - t_1) \\
\frac{1}{2}gt_1^2 + v_s t_1 - v_s T &= 0 \\
t_1 &= \frac{-v_s \pm \sqrt{v_s^2 + 4.\frac{1}{2}gv_s T}}{g} \\
&= \frac{-330 \pm \sqrt{330^2 + 2.9,81.330.5}}{9,81} \\
&= 4,675 \text{ s} \\
h &= 330.(5 - 4,675) = 107 \text{ m.}
\end{aligned}$$