Corrigés des séances 12 et 13
Chap 12 et 13: Les ondes et le son

Questions pour réfléchir :

Q2. p.522. En décembre 1916, un désastre majeur est survenu dans les Alpes à un contingent de l'armée autrichienne. A peine avaient-ils commencé un tir de barrage au canon, qu'une avalanche de neige se déclencha, ensevelissant des milliers de soldats. Quelles propriétés du son peut-on déduire de cet événement?

Le son est le résultat d'une vibration qui se propage dans un milieu; un son très fort, tel celui d'un coup de canon, provoque des vibrations de grande amplitude qui se transmettent à la couche de neige et la décolle de la paroi, provoquant l'avalanche.

Q7. p.522. Quand une corde de guitare est pincée avec un médiateur, elle produit un son plus métallique que quand elle est pincée avec les doigts. Quand on la pince en son milieu, puis progressivement de plus en plus près d'une de ses extrémités, on obtient d'abord un son assez terne, puis plus riche, puis plus métallique. Expliquez ces observations.

Les fréquences de vibrations d'une corde sont des multiples entiers de la fréquence fondamentale, cette dernière dépendant des caractéristiques de la corde (masse, longueur, tension). La perception d'un son plus métallique avec un médiateur provient du fait que les vibrations de la corde ne sont pas purement sinusoïdales mais contiennent de nombreux harmoniques à des fréquences plus élevées. Pinçer la corde au milieu revient à sélectionner des harmoniques impairs qui présentent un ventre en ce point (amplitude maximale). En pinçant la corde plus prés des extrémités, il devient alors possible d'exciter aussi les harmoniques pairs et donc d'avoir un son plus riche.

Q13. p.523. Pour amplifier le son d'un diapason, on le monte sur une boîte en bois, dont l'une des faces est ouverte. Expliquez comment le son est amplifié. En quoi les boîtes d'amplification de deux diapasons, l'un de 1000 Hz et l'autre de 50 Hz, différeront-elles ?

La son est amplifié par le phénomène de résonance. Le son produit par le diapason est transmis à l'air avant d'être réfléchi par les parois de la boîte. L'amplification du son est maximale si la fréquence du diapason coincide avec la fréquence naturelle de la boîte. Comme cette dernière est inversement proportionnelle à la taille de la boîte, l'amplification d'un son de fréquence 1000 Hz nécessite une boîte plus petite que l'amplification d'un son de 50 Hz.

Exercices:

42. [c] p.391. Un ressort a une longueur au repos égale à $10,0$ cm. Lorsqu'il est soumis à une force de $40,0$ N, sa longueur devient $14,0$ cm. Calculez le travail nécessaire pour étirer ce ressort de $14,0$ cm à $18,0$ cm.

L'allongement x par rapport à la longueur au repos $l_0 = 10,0$ cm est lié à la force agissant sur le ressort par la loi de Hooke : $F = kx$. Avec $x = 4,0 \times 10^{-3}$ m et $F = 40,0$ N, on obtient $k = 1,00 \times 10^3$ N/m. Le travail W nécessaire pour allonger le ressort de 14,0 cm à 18,0 cm est égal à

$$W = \int_{4\times10^{-2}}^{8\times10^{-2}} kx \, \mathrm{d}x = \left.\frac{kx^2}{2}\right|_{4\times10^{-2}}^{8\times10^{-2}} = 500 \times (64 - 16) \times 10^{-4} \text{ J} = 2,40 \text{ J}.$$

43. [II] p.391. Un ressort hélicoïdal a une longueur de 55 cm s'il porte une charge de 100 N et une longueur de 57 cm s'il porte une charge de 110 N. Quelle est la constante d'élasticité de ce ressort ?

Dans les deux situations, le ressort est soumis à une force et est donc allongé par rapport à sa longueur au repos l_0. On sait :

$$l_0 + x_1 = 0,55 \text{ m} \longleftrightarrow F_1 = kx_1 = 100 \text{ N}$$

$$l_0 + x_2 = 0,57 \text{ m} \longleftrightarrow F_2 = kx_2 = 110 \text{ N}$$

$$\text{donc} \quad k(x_2 - x_1) = F_2 - F_1, \quad \text{soit} \quad k = 500\text{N/m}.$$

45. [II] p.391. La liaison d'un atome dans une molécule peut être modélisée par un ressort. Estimer la valeur de la constante élastique, si l'énergie potentielle emmagasinée est de $2\ \mathrm{eV} = 3,2 \times 10^{-19}$ J, lorsque l'atome est déplacé de $0,2$ nm à partir de la position d'équilibre.

L'énergie potentielle est donnée par $E = kx^2/2$ avec l'allongement $x = 0,2$ nm et k la constante d'élasticité. Par conséquent,

$$k = \frac{2E}{x^2} = \frac{2.3,2 \times 10^{-19}\ \mathrm{J}}{(0,2 \times 10^{-9})^2\ \mathrm{m}^2} = 16\ \mathrm{J/m}^2$$

41. [II] p.484. Un bloc rectangulaire, homogène, de masse volumique ρ et de côtés a, b, c flotte, partiellement immergé dans l'eau, avec le côté de longueur b vertical. Si on le pousse un peu vers le bas puis on le lâche, il se met à osciller. Montrer que le mouvement est sinusoïdal et déterminer sa période.

Le bloc flotte parce que son poids est compensé par la poussée d'Archimède (égale au poids de l'eau déplacée). Si le bloc est plongé d'une profondeur x alors il sera soumis à une force d'Archimède supplémentaire $m_{\mathrm{eau}}g$ dirigée vers le haut, avec $m_{\mathrm{eau}} = \rho_{\mathrm{eau}}acx$ et ρ_{eau} la masse volumique de l'eau. La force s'oppose au plongement et est de la forme $-kx$ avec $k = acg\rho_{\mathrm{eau}}$ (selon un axe vertical vers le bas) comme pour un ressort. Le mouvement sera donc sinusoïdal avec une période

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_{\mathrm{bloc}}}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{abc\rho}{acg\rho_{\mathrm{eau}}}} = 2\pi\sqrt{\frac{b\rho}{g\rho_{\mathrm{eau}}}}$$

61. [I] p.485. La vitesse des ondes de compression dans l'eau pure est de $1498\ m/s$. Quelle est la longueur d'onde d'un son de $440\ Hz$ dans l'eau ?

La longueur d'onde λ est reliée à la vitesse v et à la fréquence f par la relation $\lambda = \mathrm{v}/f$. Dès lors $\lambda = 1498/440\ \mathrm{m} = 3,40\ \mathrm{m}$.

67. [I] p.485. La corde d'un violon a une masse linéique de $59 \times 10^{-3}\ kg/m$ et une tension de $10\ N$. Quelle sera la vitesse des ondes transversales sur cette corde ?

La vitesse des ondes transversales sur la corde est égale à

$$\mathrm{v} = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} = \sqrt{\frac{10}{0,59}}\ \mathrm{m/s} = 13\ \mathrm{m/s}.$$

74. [I] p.486. On définit le nombre d'onde $k = 2\pi/\lambda$, où λ est la longueur d'onde. Montrer qu'une onde sinusoïdale, qui se propage dans le sens des x positifs avec une vitesse c, peut être écrite sous la forme $\psi = A\sin[k(x - ct)]$. Montrer qu'elle peut aussi être écrite sous la forme $\psi = A\sin(kx - \omega t)$.

L'équation (12.19) p.470 donne l'expression d'une onde sinusoïdale se déplaçant dans le sens positif des x :

$$y(x,t) = A\sin\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct).$$

Or $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, donc $kc = \frac{2\pi}{\lambda}c = 2\pi f = \omega$. D'où

$$y(x,t) = A\sin(kx - \omega t).$$

82. [II] p.486. Le profil d'une onde sinusoïdale transversale sur une longue corde est décrit, en unités SI, par la fonction : $y = 0,02\sin(6,28x)$. Sachant que l'onde a une vitesse de $5,0$ m/s, déterminer la vitesse transversale maximum en un point quelconque de la corde.

A un instant t quelconque, l'onde peut-être décrite par $y(x,t) = 0,02\sin[k(x - vt)]$ avec $k = 6,28\ \mathrm{m}^{-1}$ et $v = 5\ \mathrm{m/s}$ (en supposant que l'onde se propage selon les x positifs). La vitesse transversale est donnée par

$$\frac{dy}{dt} = -0,02kv\cos[k(x - vt)]\,.$$

La vitesse transversale maximum est donc $0,02kv = 0,02\times 6,28\times 5 = 0,628\ \mathrm{m/s}$.

84. [II] p.487. Utiliser l'analyse dimensionnelle pour écrire une expression de la vitesse d'une onde de compression dans un solide. On s'attend à ce que la vitesse dépende du module de Young et de la masse volumique. Nous écrivons donc $v = KY^a\rho^b$ où a et b sont deux exposants à déterminer et K est une constante sans dimensions.

Les dimensions de Y sont $\mathrm{N/m^2}$ or $1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg.m/s^2}$, donc $[Y] = \mathrm{kg/ms^2}$. En remplaçant dans l'expression de v, nous trouvons

$$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{kg}^{a+b}}{\mathrm{s}^{2a}\mathrm{m}^{a+3b}}\,.$$

La solution de cette équation est $a = -b = 1/2$.

89. [II] p.487. Un télégraphe-jouet envoie des impulsions ondulatoires transversales mécaniques le long d'une corde tendue. Il opère entre deux maisons voisines en utilisant une corde de 12 m et d'un poids total de $0,20$ N. Que doit être la tension de la corde pour que les signaux se déplacent au moins aussi vite que si les utilisateurs se parlaient directement? Prendre la vitesse du son dans l'air égale à 333 m/s.

De l'expression de la vitesse v d'une onde dans une corde, nous avons

$$F_T = v^2 \mu = v^2 \frac{m}{L} = v^2 \frac{P}{gL} = 333^2 \frac{0,20}{10 \times 12} = 1,8 \times 10^2 \text{ N}.$$

1. [I] p.525. En musique, la note étalon la_3 a une fréquence de $440\ Hz$. Quelles sont la période et la longueur d'onde correspondantes à la température ambiante (la vitesse du son dans l'air est de 340 m/s) ?

La période $T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{440 \text{ Hz}} = 2,27 \times 10^{-3} s$. Dans l'air, la vitesse de propagation des ondes est v $\simeq 340$ m/s, d'où la longueur d'onde $\lambda = \dfrac{\text{v}}{f} = \dfrac{340}{440} = 0,77$ m.

7. [I] p.525 Une source sonore ponctuelle émet une onde de puissance $50\ W$ dans un milieu homogène. Déterminer l'intensité du rayonnement sonore à $10\ m$ de la source. Quelle est l'énergie reçue, en une seconde, par un petit détecteur de $1,0\ cm^2$ de surface tenu perpendiculairement à la direction de l'onde à $10\ m$ de la source ? On négligera les pertes.

Par définition, l'intensité I est égale à la puissance P par unité de surface S soit $I = \dfrac{P}{S} = \dfrac{50}{4\pi.10^2}$ Wm^{-2} $= 4.10^{-2}$ Wm^{-2}. L'énergie reçue par un détecteur de surface S_d pendant le temps Δt est : $E = I \times S_d \times \Delta t = 4.10^{-2} \times 10^{-4} \times 1$ J $= 4 \times 10^{-6}$ J.

(12.) [I] p.525. L'une des caractéristiques acoustiques les plus importantes d'une pièce est son temps de reverbération. C'est le temps que met le son pour diminuer de $60\ dB$. Qu'est-ce que cela signifie en termes d'intensité sonore ? Dans une salle de concert, le temps de reverbération est en général de 1 à $3\ s$.

Pour une variation d'intensité de I_1 à I_2, le niveau sonore varie de $\Delta\beta = 10 \log_{10} \dfrac{I_2}{I_1}$(dB).

On en conclut que $\dfrac{I_2}{I_1} = 10^{-6}$.

26. [II] p.526. On considère une tige d'un alliage d'aluminium de longueur $10\ m$, de section $1,0\ cm^2$, de masse $2,7\ kg$ et de module de Young $E = 7,0 \times 10^{10}\ N/m^2$. On frappe sur son extrémité avec une fréquence de $100\ Hz$. Combien de temps faut-il pour que le signal sonore atteigne l'autre extrémité de la tige, sachant que la vitesse de propagation v $= (E/\rho)^{1/2}$? Quelle sera la longueur d'onde ?

La densité de la tige est donnée par

$$\rho = \frac{m}{Sl} = \frac{2,7}{10 \times 10^{-4}}\ \text{kg/m}^{-3} = 2,7 \times 10^3\ \text{kg/m}^3.$$

La vitesse de l'onde vaut donc

$$\mathrm{v} = \left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{7 \times 10^{10}}{2,7 \times 10^3}}\ \text{m/s} = 5,1 \times 10^3\ \text{m/s}.$$

L'onde sonore atteindra finalement l'extrémité de la tige au temps

$$t = \frac{l}{\mathrm{v}} = \frac{10}{5,1 \times 10^3}\ \text{s} = 2,0 \times 10^{-3}\ \text{s},$$

et la longueur d'onde est de $\lambda = \mathrm{v}T = \dfrac{\mathrm{v}}{f} = \dfrac{5,1 \times 10^3}{100}\ \text{m} = 51\ \text{m}.$

32. [II] p.526. Le niveau sonore d'un grand moteur est de $130\ dB$ à une distance de $10,0\ m$. Quelle est l'intensité sonore à $100\ m$ du moteur ?

Le rapport des intensités sonores est donnée par

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{100^2}{10^2} = 100.$$

La diminution d'intensité sonore entre une source à 100 m et à 10 m est donc

$$\Delta\beta = 10 \log \frac{I_1}{I_2} = 10 \log 100 = +20\ \text{dB}.$$

On passe donc de 130 à 110 dB.

(36.) [II] p.526. Dans une pièce, le bruit provenant d'un aspirateur est de $80,0\ dB$. Une personne règle un poste de radio à $65,0\ dB$. Quel est alors le niveau d'intensité dans cette pièce ?

Nous avons deux sources dont les intensités sont :

- source 1 : $\beta_1 = 10 \log \dfrac{I_1}{I_0} = 80\ \text{dB} \rightarrow \dfrac{I_1}{I_0} = 10^8$

- source 2 : $\beta_2 = 10 \log \frac{I_2}{I_0} = 65$ dB $\rightarrow \frac{I_1}{I_0} = 10^{6,5}$

où I_0 est une intensité de référence arbitraire. L'intensité sonore totale est la somme des intensités, donc

$$I_{tot} = \frac{I_1 + I_2}{I_0} = 10^8 + 10^{6,5}.$$

En decibels, on obtient $\beta_{tot} = 10 \log \frac{I_1+I_2}{I_0} = 10 \log(10^8 + 10^{6,5}) = 80,1$ dB. Si le volume total doublait, on aurait seulement une augmentation de 3 dB.

44. [I] p.527. Deux ondes sonores de pulsations $900,0\ rad/s$ et $896,0\ rad/s$ se superposent. Quelle est la fréquence des battements résultants ?

Quand 2 ondes de fréquence f_1 et f_2 se superposent, la fréquence des battements resultants est $f = |f_1 - f_2|$ soit $f = \frac{900-896}{2\pi} = 0,6366 Hz.$

48. [I] p.527. Un fil est tendu entre deux points distants de $50\ cm$. Quelles sont les longueurs d'ondes du mode fondamental et du second mode harmonique ?

Pour un fil de longueur L fixé à ses deux extrémités, le mode fondamental ($N = 1$) comporte un seul ventre au milieu du fil, et la longueur d'onde est $\lambda_1 = 2L$. Pour le mode $N = 2$, $L = \frac{1}{2} \times 2 \times \lambda_2$. Pour $L = 0,5$ m on trouve $\lambda_1 = 1$ m et $\lambda_2 = 0,5$ m.

60. [I] p.527. Un dispositif muni d'un émetteur et d'un récepteur est introduit dans une veine et émet une onde ultrasonique de 80000 Hz. L'onde se réfléchit sur les globules rouges du sang, et le récepteur capte une onde de 80020 Hz. Quelle est la vitesse du flux sanguin ? La vitesse du son dans le sang est d'environ 1,5 km/s.

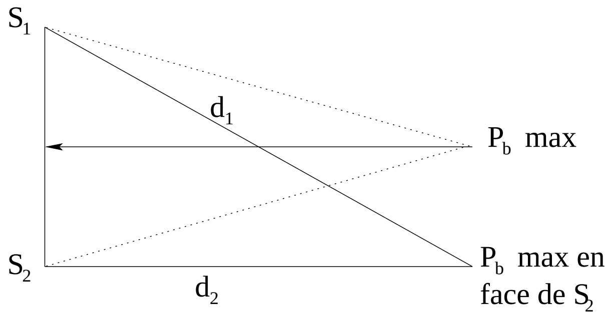
Les ultrasons réflčhis par les globules rouges sont reçus à une fréquence f_r différente de la fréquence f des ultrasons produits par l'émetteur à cause de deux effets Doppler: une fois sur les ultrasons incidents et une deuxième fois sur les ultrasons réfléchis par les globules rouges. En notant v la vitesse du son dans le sang et v_s la vitesse du flux sanguin, nous avons $f_r = f(v + v_s)/(v - v_s)$, d'où

$$v_s = v\frac{f_r - f}{f_r + f} = 1,5 \times 10^3 \frac{80020 - 80000}{80020 + 80000} = 0,19 \text{ m/s}\,.$$

(75.) [II] p.528. Une tige de cuivre de longueur $1,00\ m$ est fortement fixée en son milieu et mise à vibrer transversalement. Sachant que v $= (E/\rho)^{1/2}$, sa masse volumique est $8,9 \times 10^3\ kg/m^3$ et son module de Young est $11 \times 10^{10}\ N/m^2$, quelle est sa fréquence ?

La tige étant fixée en son centre, on a 1 noeud et 2 ventres pour le mode fondamental, soit $L = \lambda/2$, soit $\lambda = 2L = 2,0$ m. La vitesse de l'onde est égale à $\mathrm{v} = \left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/2} = 3516$ m/s. La fréquence de vibration est donc égale à $f = \frac{\mathrm{v}}{\lambda} = 1,8$ kHz.

74. [II] p.528. Deux petits hauts-parleurs distants de $3,00\ m$ émettent un son de fréquence constante $344\ Hz$ (voir figure ci-dessous). On déplace un microphone le long d'une droite parallèle à la ligne S_1S_2 joignant les deux haut-parleurs et située à $4,00\ m$ de cette ligne. On trouve deux maxima d'intensité: le premier au point O équidistant des deux haut-parleurs, et le second juste en face de l'un des haut-parleurs. Utilisant ces données, calculez la vitesse du son. [Suggestion : les ondes doivent arriver en phase pour qu'elles produisent un maximum d'interférence].



La vitesse du son est donnée par $\mathrm{v} = \lambda f$. On connaît la fréquence du son. Il reste à calculer λ. Pour avoir une interférence constructive maximum en P_b, il faut que les sons des deux sources S_1 et S_2 soient en phase. Les amplitudes des deux sons en P_b sont égales à

$$y_1(P_b) = A\sin(\omega t + \phi_1)$$
$$y_2(P_b) = A\sin(\omega t + \phi_2)$$

où ϕ_i est le déphasage du son entre la source i et le point P_b. La condition pour que les ondes soient en phase s'écrit donc

$$|\phi_2 - \phi_1| = 2N\pi, \qquad N = 0, 1, 2, ...$$

Le premier maximum a lieu lorsque $N = 0$, soit $\phi_2 = \phi_1$. Le second maximum a lieu lorsque $N = 1$, soit $|\phi_2 - \phi_1| = 2\pi$. D'autre part, le déphasage entre la source et un point situé à une distance d de la source est égal à $\phi = 2\pi\frac{d}{\lambda} = kd$. Donc:

$$|\phi_2 - \phi_1| = k(d_2 - d_1) = \frac{2\pi}{\lambda}(d_1 - d_2) = 2\pi.$$

Dès lors, $d_2 - d_1 = \lambda = (\sqrt{3^2 + 4^2} - 4)$ m $= 1$ m. On trouve v $= \lambda f = 344$ m/s.

84. [III] p.529. Les deux haut-parleurs de la figure P74 émettent des sons de même fréquence et en phase. Montrer que la distance qui les sépare doit dépasser $\frac{1}{2}\lambda$ si l'on veut observer un minimum nul par interférence quelque part dans la zone située devant les haut-parleurs.

Les interférences produisent un minimum nul si le déphasage entre les deux ondes est est multiple impair de π. Pour que cela soit possible, en utilisant les résultats de l'exercice prćdent, il faut que

$$\frac{2\pi}{\lambda}|d_2 - d_1| \geq \pi \Rightarrow |d_2 - d_1| \geq \frac{\lambda}{2}\,.$$

Or la différence de marche $|d_1 - d_2|$, qui diminue lorsque la distance d_1 ou d_2 augmente; est au maximum égale à la distance a entre les deux haut-parleurs. Si l'on veut observer un minimum nul, il faut donc que $a \geq \lambda/2$.

QUESTION DE L'EXAMEN D'AOÛT 2006

L'extrémité de chaque pointe d'un diapason qui vibre à une fréquence de 264 Hz se déplace de 1,5 mm de part et d'autre de sa position de repos. Calculez:
a) la vitesse maximale;
b) l'accélération maximale de l'extrémité de chacune des pointes du diapason.

Il s'agit d'un mouvement d'oscillation harmonique, d'équation

$$x(t) = A\cos\omega t, \quad \text{où } A = x_{max} = 1,5 \text{ mm} = 1,5.10^{-3} \text{ m},$$

et la pulsation $\omega = 2\pi\nu = 2\pi.264$ s^{-1} $= 1660$ rad/s. En dérivant on trouve les expressions de la vitesse et de l'accélération:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -A\omega\sin\omega t \Rightarrow v_{max} = A\omega = 1,5.10^{-3}.1660 \text{ m/s} = 2,5 \text{ m/s}.$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -A\omega^2\cos\omega t \Rightarrow a_{max} = A\omega^2 = 1,5.10^{-3}.1660^2 \text{ m/s}^2 = 4,1.10^3 \text{ m/s}^2.$$

QUESTION DE L'EXAMEN DE JANVIER 2007

Deux cordes fabriquées dans la même matière sont attachées l'une à l'autre; la deuxième a un diamètre double de celui de la première. L'extrémité libre de la première corde est soumise à un mouvement d'oscillation transverse dont la période est de 1,0 s. L'onde qui se forme dans cette corde a une longueur de 1,0 m. Quelle est la longueur de l'onde qui se forme dans la deuxième corde ?

Vitesse dans la première corde:

$$V_1 = \lambda_1 \nu_1 = \lambda_1/T_1 = 1 \text{ m/s} = \sqrt{F_{T1}/\mu_1},$$

où F_{T1} est la tension dans la corde 1 et μ_1 est sa masse linéique. Les tensions dans les deux cordes sont égales, sinon elles se déplaceraient globalement (la résultante serait non-nulle): $F_{T1} = F_{T2}$. La masse linéique de la corde 2 est 4 fois plus grande que celle de la corde 1, car le rayon est double: $\mu_2 = 4\mu_1$. Dans la deuxième corde on a donc:

$$V_2 = \sqrt{F_{T2}/\mu_2} = \sqrt{F_{T1}/4\mu_1} = V_1/2;$$

et comme les deux cordes oscillent à la même fréquence, qui est celle du noeud qui les lie $\nu_2 = \nu_1$, donc

$$V_2 = \lambda_2 \nu_2 = \lambda_2 \nu_1 = V_1/2 = (\lambda_1 \nu_1)/2;$$

$$\lambda_2 = \lambda_1/2 = 0,50 \text{ m}.$$

QUESTION DE L'EXAMEN DE JUIN 2010

On accroche à un ressort, dont la constante de rappel est 15 N/m, une boule dont la masse est de 100 g.
a. si on laisse le ressort s'allonger tout doucement en soutenant la boule jusqu'à la position de repos, de combien le ressort s'allongera-t-il ?
b. si au contraire on accroche la boule au ressort non allongé et qu'on la lâche brusquement, jusqu'où la boule descendra-t-elle ?
c. dans ce cas, en quel point l'accélération de la boule est-elle la plus grande et combien vaut-elle en ce point ?
d. en quel point la vitesse de la boule est-elle la plus grande et que vaut-elle ?

a. A la nouvelle position d'équilibre, la force de rappel compense exactement le poids $k\Delta\ell = mg$ donc $\Delta\ell = mg/k = 0,067$ m.

b. Conservation de l'énergie : $E_p(g) + E_p(ressort) + E_{cin} = constante$. On convient de mesurer l'énergie potentielle gravitationnelle par rapport au point le plus bas.

- au point le plus haut : $E = mg\Delta L + 0 + 0$ (vitesse nulle)
- au point le plus bas : $E = 0 + (1/2)k(\Delta L)^2 + 0$ (vitesse nulle)

Donc $\Delta L = 2mg/k = 0,13$ m. On remarque que $\Delta L = 2\Delta\ell$: comme vu au cours, le mouvement est symétrique par rapport au nouveau point d'équilibre.
c. Au point le plus haut, la seule force est la force gravitationnelle, l'accélération vaut g et elle est dirigée vers le bas (axe vers le bas). Ailleurs, la résultante des forces est égale à la somme de la force gravitationnelle (dirigée vers le bas) et de la force de rappel (dirigée vers le haut). La somme s'annule au point d'équilibre, et au-delà de ce point, la force de rappel surpasse la force gravitationnelle ; la résultante est dirigée vers le haut. Elle est la plus grande là où la force de rappel est la plus grande, c'est-à-dire au point le plus bas. En ce point, la résultante est $F = mg - k\Delta L = mg - k.2mg/k = -g$. La norme de la force (et donc de l'accélération) est donc la même, et maximale, aux deux extrémités du mouvement. Ceci est conforme au fait que le mouvement est symétrique par rapport au nouveau point d'équilibre.
d. La résultante des forces, dirigée vers le bas, est non nulle jusqu'au point d'équilibre (où elles se compensent). Du point le plus haut jusqu'au point d'équilibre, l'accélération et la vitesse sont donc orientées dans le même sens, et le mouvement vers le bas est donc de plus en plus rapide. A partir du point d'équilibre, la résultante des forces est orientée vers le haut, alors que la vitesse est orientée vers le bas. La grandeur de la vitesse diminue donc. La vitesse est donc la plus grande au point d'équilibre. Elle est donnée par la conservation de l'énergie (on mesure l'énergie potentielle par rapport au point d'équilibre) :

- au point le plus haut : $E = mg\Delta\ell + 0 + 0 = mg.mg/k$
- au point d'équilibre : $E = 0+(1/2)k(\Delta l)^2+(1/2)mv^2 = (1/2)k(mg/k)^2+ (1/2)mv^2$.

Donc $v^2 = 2mg^2/k - mg^2/k = mg^2/k = g\Delta\ell \Rightarrow v = 0,82$ m/s.

QUESTION DE L'EXAMEN D'AOUT 2009

Déterminez la fréquence de l'oscillation d'une pierre suspendue à une corde, l'amplitude des oscillations étant de 3,0° et la vitesse maximum de la pierre de 0,20 m/s. On néglige les frottements.

La vitesse maximale est au point le plus bas, où l'énergie potentielle est minimale (on la prend nulle). Au point le plus haut, l'énergie potentielle est mgh et l'énergie cinétique est nulle. En appliquant la loi de conservation de l'énergie, on trouve la longueur de la corde, sachant que la hauteur h dont s'élève la pierre est donnée par $h = L(1 - \cos\theta)$:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \Rightarrow h = \frac{v^2}{2g} = L(1 - \cos\theta) \Rightarrow L = \frac{v^2}{2g(1 - \cos\theta)} .$$

Connaissant la longueur de la corde, on trouve la fréquence, qui est l'inverse de la période :

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} = 0,42 \text{ Hz} .$$