

Université Libre de Bruxelles
Faculté des Sciences

BA-1 Biologie , Géographie, Géologie, Pharmacie

Physique I

(mécanique)

PHYS-F-104

2014-2015

Titulaire: P. Vanlaer pascal.vanlaer@ulb.ac.be

Notes: P. Marage, P. Vanlaer

Avertissement

Ces notes visent à aider les étudiants dans l'étude du cours, en en résumant (en style télégraphique) les principaux résultats.

Elles ne forment donc qu'un *complément* au cours oral et aux séances d'exercices, qui constituent la base de l'enseignement et qu'elles ne peuvent en aucune manière remplacer.

Comme le cours, elles respectent pour l'essentiel le plan et les notations de l'ouvrage de référence (E. Hecht, « Physique », De Boeck Université).

Elles reprennent en outre les parties (peu nombreuses) de l'enseignement oral qui vont au-delà du contenu de l'ouvrage de Hecht.

Elles ne peuvent en aucune manière se substituer au travail personnel de chaque étudiant pour se constituer un résumé personnel du cours et un formulaire.

D'autres instruments d'aide aux étudiants, notamment les énoncés et corrigés des séances d'exercices et les questions et corrigés des examens des années précédentes, sont disponibles sur internet sur l'Université Virtuelle. Les énoncés des séances d'exercice, les questions et corrigés des examens des années précédentes sont également publiés aux PUB. Les corrigés des séances d'exercice sont distribuées en séance d'exercices.

Plan du cours

0. Notions de mathématiques

I. Cinématique

vitesse (scalaire, vectorielle)

accélération

mouvement uniformément accéléré

balistique

II. Dynamique

3 lois de Newton

quantité de mouvement; conservation dans les systèmes isolés

force et accélération

liaisons par des cordes

force centripète (mouvement curviligne)

frottements

III. Gravitation

loi de Newton

lois de Kepler

marées

IV. Statique

moment d'une force

lois de la statique

centre de gravité

- V. **Rotation**
 - cinématique
 - moment d'inertie
 - dynamique
 - moment cinétique (conservation dans les systèmes isolés)

- VI. **Travail – énergie**
 - travail
 - énergie cinétique
 - énergie potentielle (gravitation, ressort)
 - conservation de l'énergie mécanique
 - collisions

- VII. **Mécanique des fluides**
 - statique : principes de Pascal, d'Archimède
 - tension superficielle, gouttes
 - dynamique : équation de Bernoulli; écoulement visqueux

- VIII. **Élasticité, oscillations et ondes**
 - élasticité
 - systèmes oscillants, oscillateur harmonique
 - ondes; interférence; ondes stationnaires

- IX. **La lumière**
 - comportement ondulatoire
 - réflexion et réfraction

- X. **Optique géométrique**
 - chemin optique
 - lentilles minces
 - l'œil
 - instruments d'optique

- XI. **Optique ondulatoire**
interférence : cohérence, expérience de Young, couches minces, interféromètre de Michelson
polarisation
diffraction

0. Notions de math.

- **Notions de base** (v. Hecht, Appendices A-B-C)
 - algèbre de base
 - formules géométriques de base
(théorème de Pythagore, aire et volume cercle, etc.)
 - fonctions, y compris représentation graphique et extrema
 - trigonométrie :
fonctions sin, cos, tg; valeurs remarqu. (0, 30, 45, 60, 90°)
formules du triangle rectangle
- **En plus, pour ce cours** (v. Hecht, Appendices D-E-F)
 - vecteurs
 - dérivées : définition, fonctions les plus courantes
 - intégrales : idem.

Vecteurs

(Hecht, appendice D)

Défini par sa longueur (norme), sa direction, son sens

c.-à-d. son origine et son extrémité ; en physique : **ses unités !**

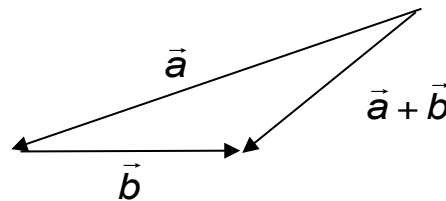
la norme $|\vec{a}|$ (pas la « valeur absolue ») est souvent notée a (scalaire positif)

Multiplication par un scalaire : $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$

(seuls la longueur et, éventuellement, le sens changent, pas la direction)

Somme de deux vecteurs (**de même espèce, de mêmes unités !**)

règle du triangle



$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

commutativité : $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

Coordonnées cartésiennes :

$$\vec{a} = a_x \vec{1}_x + a_y \vec{1}_y + a_z \vec{1}_z$$

dans le plan : $a_x = |\vec{a}| \cos \theta$ $a_y = |\vec{a}| \sin \theta$ où $\theta =$ angle entre axe x et \vec{a}

Produit scalaire : $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta(\vec{a}, \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

c'est un *scalaire*, mais il peut avoir des *dimensions* !

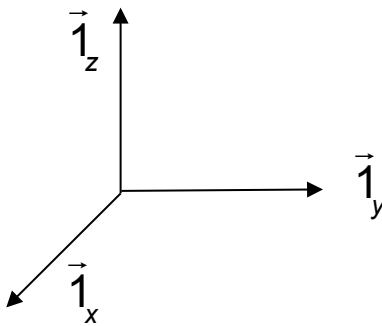
Produit vectoriel :

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} = a b \sin \theta(\vec{a}, \vec{b}) \vec{1}_\perp = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \end{vmatrix}$$

(\vec{a}, \vec{b}) dans le plan (x,y) : $\vec{a} \times \vec{b} = a b \sin \theta(\vec{a}, \vec{b}) \vec{1}_z = (a_x b_y - a_y b_x) \vec{1}_z$

c'est un *vecteur*. NB que $\sin \theta(\vec{a}, \vec{b})$ a un *signe* (angle de a vers b)

Convention : $\vec{1}_x \times \vec{1}_y = \vec{1}_z$



Dérivées

(Hecht, appendice F1)

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

attention : $\frac{df(x)}{dx}$ est une *notation*, **pas** un quotient !

Interprétation : pente (ou coefficient anglaire) de la tangente à la courbe (+ unités !)

$$\frac{d}{dx}(\text{Cte}) = 0$$

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}[Cf(x)] = C \frac{df}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = \frac{df}{dx}g + f \frac{dg}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{1}{g^2} \left[\frac{df}{dx}g - f \frac{dg}{dx} \right]$$

$$\frac{d \sin(x)}{dx} = \cos(x) \quad \frac{d \cos(x)}{dx} = -\sin(x)$$

$$\frac{d}{dx} e^{ax} = ae^{ax} \quad \frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{df(u(x))}{dx} = \frac{df(u)}{du} \frac{du(x)}{dx}$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right)$$

attention : $\frac{d^2f}{dx^2}$ est une notation, **pas** un carré !

Intégrales

(Hecht, appendice F2)

Primitive : $F(x) = \int f(x) dx + C \Leftrightarrow f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ opération "inverse" de la dérivée

NB: $F(x)$ est définie **à une constante près** !

$$\int K dx = Kx + C \quad (K = \text{constante})$$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad \text{si } n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$$

$$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C$$

$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + C$$

Intégrale définie :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_0^t f(\tau) d\tau = F(t) - F(0) \quad \tau \text{ est un indice "muet"}$$

Interprétation : "aire" comprise entre l'axe des x et la courbe $f(x)$,

avec contributions positives au-dessus de l'axe x , négatives en-dessous

Grandeurs - mesures - unités

➤ Grandeurs indépendantes

Longueur, masse, temps, courant électrique, température, intensité lumineuse, quantité de matière

Système international : m, kg, s, A, K, cd, mol

NB radian : pas d'unités (arc / rayon de la circonférence), mais préciser si les angles sont exprimés en degrés ou en radians

➤ Mesures

Notation scientifique : puissances de 10

Précision : nombre de chiffres significatifs

Règles pour opérations :

nombre de chiffres significatifs du résultat (c.-à-d. sa précision) :

- multiplication, division : nombre de chiffres significatifs de la mesure la moins précise
- addition, soustraction : même nombre de décimales que la mesure la moins précise
- fonctions trigono., log., exp. : même nombre de chiffres signif. que l'argument

➤ Graphiques

Unité sur chaque axe

Pente (= coefficient angulaire) : unités !

I. Cinématique

1. vitesse (scalaire, vectorielle)
2. accélération
3. mouvement rectiligne uniformément accéléré
4. balistique

1. Vitesse

➤ Vitesse scalaire

l = distance parcourue le long de la trajectoire

vitesse (scalaire) moyenne $v_m = \frac{\Delta l}{\Delta t}$ [ms⁻¹]

vitesse (scalaire) instantanée $v_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{dl}{dt}$ [ms⁻¹]

✓ vitesse scalaire toujours positive

✓ un scalaire n'est *pas* un « nombre pur » : en physique, dimensions !

➤ Vitesse vectorielle

vecteur déplacement $\vec{s} = \Delta \vec{r} = \Delta x \vec{1}_x + \Delta y \vec{1}_y + \Delta z \vec{1}_z$ (direction, sens, grandeur)

défini par *positions* initiale et finale :

\vec{s} est nul si $P_f = P_i$, même si la distance parcourue l est non nulle

vecteur vitesse moyenne $\vec{v} = \frac{\vec{s}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ [ms⁻¹]

vecteur vitesse instantanée $\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{1}_x + \frac{dy}{dt} \vec{1}_y + \frac{dz}{dt} \vec{1}_z$ [ms⁻¹]

Mouvement relatif : addition des vitesses

(non relativistes : toutes les vitesses $\ll c$)

Position : $\overrightarrow{O'A} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA}$ ou encore $\vec{r}' = \overrightarrow{O'O} + \vec{r}$

Vitesse = dérivée : $\vec{V}_{A,O'} = \vec{V}_{O,O'} + \vec{V}_{A,O}$

où

- $\vec{V}_{A,O'}$ est la vitesse de A dans le référentiel O'
- $\vec{V}_{O,O'}$ est la vitesse du référentiel O dans le référentiel O'
- $\vec{V}_{A,O}$ est la vitesse de A dans le référentiel O

2. Accélération

Accélération = taux de variation de la vitesse

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} \vec{1}_x + \frac{dv_y}{dt} \vec{1}_y + \frac{dv_z}{dt} \vec{1}_z \quad [\text{ms}^{-2}]$$

NB une équation vectorielle = 3 équations scalaires (selon x, y, z)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{v}(t) = \int_0^t \vec{a}(\tau) d\tau + \vec{v}_0$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \vec{r}(t) = \int_0^t \vec{v}(\tau) d\tau + \vec{r}_0 = \int_0^t \left[\int_0^\tau \vec{a}(\zeta) d\zeta \right] d\tau + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$$

La vitesse \vec{v} est tangente à la trajectoire ($\vec{1}_v = \vec{1}_T$) puisqu'elle est orientée selon $\Delta \vec{r}$, quand $\Delta \vec{r} \rightarrow 0$

Mais l'accélération \vec{a} n'est **pas** tangente à la trajectoire : elle est selon $\Delta \vec{v}$:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(|\vec{v}| \vec{1}_v)}{dt} = \frac{d(|\vec{v}|)}{dt} \vec{1}_v + |\vec{v}| \frac{d(\vec{1}_v)}{dt}$$

1^{er} terme : changement de vitesse *scalaire*, dirigé selon la trajectoire

2^{ème} terme : changement de *direction* de la vitesse (de la trajectoire)

$$\rightarrow \text{voir plus loin : } \vec{a} = a_T \vec{1}_T + a_N \vec{1}_N$$

3. Mouvement uniformément accéléré

NB : $\vec{a} = \text{constante} \rightarrow$ norme $|\vec{a}|$ constante **et** direction constante

- Mouvement rectiligne : \vec{a} et \vec{v}_0 selon x
(vitesse et acc. sont des grandeurs « algébriques »)

$$v = \int_0^t a(\tau) d\tau + v_0 = at + v_0$$

$$x = \int_0^t v(\tau) d\tau + x_0 = \int_0^t [a\tau + v_0] d\tau + x_0 = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

En outre, dans **ce** cas (accélération constante) :

$$x = \frac{1}{2}(v_0 + v_f)t + x_0 = v_m t + x_0 \quad (\text{ne pas confondre avec mvt. uniforme !})$$

$$s = x - x_0 = \frac{1}{2a}(v^2 - v_0^2) \quad \Leftrightarrow \quad v^2 = v_0^2 + 2as$$

- Si la vitesse initiale \vec{v}_0 est quelconque \rightarrow mouvement dans un plan, en général non rectiligne
ex.: mouvement dans le champ de la pesanteur = parabole

4. Chute dans le champ de la pesanteur (balistique)

Tous les corps tombent avec la même accélération \vec{g} verticale, mais vitesse initiale \vec{v}_0 peut avoir des composantes H et V

Équations du mouvement : séparer

- mouvement vertical uniformément accéléré $z = \frac{1}{2} g t^2 + v_{0,V} t + z_0$
- mouvement horizontal uniforme $x = v_{0,H} t + x_0$

Attention au signe des projections, grandeurs algébriques :
signes de g et de z dépendent de l'orientation de l'axe

Altitude atteinte :

$$z_{\max} - z_0 = \frac{(|\vec{v}_0| \sin \theta)^2}{2|\vec{g}|}$$

Portée :

$$s_P = x_{\max} - x_0 = \frac{2|\vec{v}_0|^2}{g} \cos \theta \sin \theta$$

Portée max. :

$$\frac{ds_P}{d\theta} = 0 \Rightarrow \theta = 45^\circ \quad (\text{en négligeant résistance de l'air})$$

II. Dynamique du point matériel

1. 3 lois de Newton
2. quantité de mouvement (systèmes isolés)
3. deuxième loi, forme
4. liaisons : cordes
5. mouvement circulaire : force centripète
référentiels non-inertiels : force centrifuge, force de Coriolis
6. frottements
7. mouvement du point matériel : récapitulatif

1. Lois de Newton - forces

Première loi (loi d'inertie, Galilée)

Tout corps qui n'est pas soumis à l'action de forces extérieures persiste dans son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme

(sous-entendu : par rapport à un référentiel au repos ou en mouvement rectiligne uniforme par rapport à « l'espace absolu » = réf. « galiléen »)

NB.: « pas soumis à l'action de forces extérieures » signifie que, si elles existent, leur *effet résultant* est nul, qu'elles « se compensent »

Deuxième loi (variation de la quantité de mouvement)

Une force extérieure \vec{F}_m agissant sur un corps pendant un temps Δt modifie

la quantité de mouvement \vec{p} du corps de la quantité $\Delta\vec{p} = \vec{F}_m \Delta t$,

où la quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}$

1. modification en grandeur **et** en direction : *vecteurs !*

2. ce qui compte : la force « résultante » : principe de superposition des forces :

$$\vec{F}_{rés} = \sum_i \vec{F}_i$$

3. force « instantanée » : $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$

Troisième loi (action - réaction)

Deux corps en interaction exercent l'un sur l'autre des forces égales en intensité et de sens opposés $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$

Attention : les forces \vec{F}_{AB} et \vec{F}_{BA} s'exercent sur des corps différents !

Unités des forces : $1 \text{ N} = 1 \text{ kg m s}^{-2}$

Remarque

définitions circulaires force \leftrightarrow masse

masse inerte = « ce qui » résiste à un changement de mouvement

force = « ce qui » provoque un changement de mouvement

2. Quantité de mouvement

Conservation de la quantité de mouvement

En l'absence de forces **extérieures** (= leur résultante étant nulle), la quantité de mouvement totale (**somme vectorielle !**) d'un système **isolé** est conservée

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left[\sum_{k \text{ corps}} m_k \vec{v}_k \right] = 0 \Leftrightarrow \left(\sum_{k \text{ corps}} m_k \vec{v}_k \right)_{t=\text{initial}} = \left(\sum_{k \text{ corps}} m_k \vec{v}_k \right)_{t=\text{final}}$$

(corollaire de la deuxième loi de Newton)

Principe fondamental de la physique, lié à l'homogénéité de l'espace (pas de position privilégiée) (théorème de Noether)

Remarques

- comme la vitesse, la quantité de mouvement (= « impulsion »; anglais « momentum ») dépend du référentiel !

- Relativité :
$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

- Mécanique quantique : pas de « trajectoire » - principe d'incertitude : $\Delta p \Delta r \geq h/2\pi$

3. Force et accélération

Corollaire de la deuxième loi $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{a}$

Rappel : une loi vectorielle = trois lois scalaires :

$$F_x = m a_x \quad F_y = m a_y \quad F_z = m a_z$$

Décomposer forces et mouvement selon les directions H et V

ex.: poids $F_p = m g$ selon la verticale

ou selon les directions // et \perp au mouvement

ex. : plan incliné (angle θ avec horiz.) $F_{P, //} = F_P \sin \theta$ $F_{P, \perp} = F_P \cos \theta$

Attention : signes fixés par l'orientation des axes

4. Liaisons (cordes)

Cordes (*inextensibles et sans masse*) :

- la « tension » dans une corde est la force exercée, à l'intérieur de celle-ci, sur ses « constituants élémentaires », dans un sens ou dans l'autre
- elle s'exerce selon la direction de la corde, et est la même en chaque point de la corde
- si la corde est au repos, la tension en un point est la même dans les deux sens; s'il y a mouvement accéléré (ex. de la fig.), la tension dans un sens est plus grande que dans l'autre

Les cordes transmettent donc la grandeur d'une force, en changeant sa direction

On a des équations couplées pour les mouvements de 2 corps reliés par une corde



5. Forces centripètes

Lors du mouvement circulaire, la vitesse change de direction

=> accélération a une composante tangentielle **et** une composante normale

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(|\vec{v}|\vec{1}_v)}{dt} = \frac{d(|\vec{v}|)}{dt}\vec{1}_v + |\vec{v}|\frac{d(\vec{1}_v)}{dt} = a_T\vec{1}_T + a_N\vec{1}_N$$

$$a_N = \text{accélération centripète} = v^2 / R = \omega^2 R$$

(dém. ci-dessous)

NB.: c'est un théorème général : limite instantanée d'un mouvement curviligne quelconque = mouvement circulaire

(pour mouvement rectiligne, $R = \infty$ et $\omega = 0$)

Accélération centripète toujours due à une **force** centripète physique :

tension d'une corde, attraction gravitationnelle ou électrostatique, frottement, composante centripète de la réaction normale à un support incliné.

Mouvement circulaire sur un cercle de rayon r

$\vec{r} = r \vec{1}_r$ avec $\vec{1}_r = \cos\theta \vec{1}_x + \sin\theta \vec{1}_y$ NB que $\vec{1}_r$ est constant en norme, mais pas en direction !

Vitesse :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r\vec{1}_r)}{dt} = r \frac{d(\vec{1}_r)}{dt} = r \left(-\sin\theta \frac{d\theta}{dt} \vec{1}_x + \cos\theta \frac{d\theta}{dt} \vec{1}_y \right) = r \frac{d\theta}{dt} \vec{1}_T$$

On vérifie géométriquement que $\vec{1}_T = -\sin\theta \vec{1}_x + \cos\theta \vec{1}_y$ et est $\perp \vec{1}_r$

(se voit aussi par la nullité du produit scalaire : $\vec{1}_T \cdot \vec{1}_r = -\sin\theta \cos\theta + \cos\theta \sin\theta = 0$)

Par définition $\vec{v} = |\vec{v}| \vec{1}_v$, et on a $\vec{1}_v = \vec{1}_T$ car memes normes (unité) et memes directions : la vitesse est selon la tangente

En notant $\omega = \frac{d\theta}{dt} \rightarrow |\vec{v}| = v = \omega r \rightarrow \vec{v} = \omega r \vec{1}_T$

Accélération :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(|\vec{v}| \vec{1}_v)}{dt} = \frac{d(|\vec{v}|)}{dt} \vec{1}_v + |\vec{v}| \frac{d(\vec{1}_v)}{dt}$$

$$= \frac{d(|\vec{v}|)}{dt} \vec{1}_T + |\vec{v}| \left(-\cos\theta \frac{d\theta}{dt} \vec{1}_x - \sin\theta \frac{d\theta}{dt} \vec{1}_y \right) = \frac{d(|\vec{v}|)}{dt} \vec{1}_T - |\vec{v}| \frac{d\theta}{dt} \vec{1}_r$$

$$= \frac{d(|\vec{v}|)}{dt} \vec{1}_T + |\vec{v}| \omega \vec{1}_N \quad \text{où } \vec{1}_N = -\vec{1}_r \text{ car tous deux sont } \perp \vec{1}_T \text{ et de sens opposés}$$

$$= \frac{d(|\vec{v}|)}{dt} \vec{1}_T + r \omega^2 \vec{1}_N$$

$$= a_T \vec{1}_T + a_N \vec{1}_N \quad \text{avec } a_T = \frac{d(|\vec{v}|)}{dt} \text{ et } a_N = r \omega^2$$

Référentiels non inertiels; pseudoforces

Les lois de Newton sont définies dans des référentiels *inertiels*
(en mouvement rectiligne uniforme par rapport à « l'espace absolu »)

Il peut être commode de travailler dans des référentiels non-inertiels:

- référentiel en mouvement rectiligne uniformément accéléré : simule la présence d'un champ de gravitation (Relativité générale)

- référentiel en rotation → apparition de « pseudoforces » :

➤ *force centrifuge* : un mouvement inertiel semble se manifester, dans un référentiel en rotation, par l'apparition d'une force centrifuge

➤ *force de Coriolis* : un corps en mouvement inertiel, considéré depuis un référentiel en rotation, semble décrire une trajectoire courbe

exemples : pendule de Foucault

rotation des masses d'air (vents), des courants marins

Accélération de Coriolis

Un corps décrit un mouvement inertiel de vitesse v , mais le référentiel tourne sous lui à vitesse angulaire ω constante.

Dans ce réf., le corps (semble) subir une accélération tangentielle (approx.) constante a' et, quand il arrive au point de rayon r par rapport au centre, il (semble) avoir décrit un arc de cercle de longueur s'

$$s' = 1/2 a' t^2 \text{ et on a également } s' = \omega r t \Rightarrow a' = 2 \omega r / t.$$

Or le mouvement est inertiel $\Rightarrow r = v t$

$\Rightarrow a' = 2 \omega v$ est l'accélération (fictive) de Coriolis

6. Forces de frottement

Par définition, force de frottement = composante de la réaction du milieu parallèle au mouvement, et qui s'y oppose.

➤ Frottements fluide - solide

Écoulements laminaires : frottements approx. proportionnels à la vitesse : $\vec{F}_f = -K \vec{v}$

Écoulements turbulents : frottements approx. prop. au carré de la vitesse

➤ Frottements solide - solide

NB Si un corps pesant est posé sur un support, la réaction du support a deux composantes :

- une composante normale, c.-à-d. perpendiculaire à la surface; si le corps ne s'enfonce pas, cette réaction normale est égale à la composante du poids perpendiculaire à la surface;
- une composante tangentielle = par définition force de frottement

Lois empiriques : la grandeur de la force de frottement

- est proportionnelle à la grandeur de la réaction normale du support normale
- dépend des caractéristiques des surfaces en contact
- est indépendante de l'aire de contact

$$|\vec{F}_f| = \mu |\vec{F}_N| \quad \mu = \text{coefficient de frottement, sans dimensions}$$

Frottements solides

➤ Frottement statique

Force maximale pouvant être exercée sur un corps sans qu'il se mette en mouvement

$$|\vec{F}_{f,\max}| = \mu_s |\vec{F}_N| \Leftrightarrow |\vec{F}_f| \leq \mu_s |\vec{F}_N|$$

➤ Frottement cinétique (corps en mouvement) :

Par définition : opposée au mouvement

$$\vec{F}_f = -\mu_c |\vec{F}_N| \vec{1}_v$$

En général $\mu_c < \mu_s$

Effet des lubrifiants : diminuer μ

➤ Frottement de rotation

Forces dues à la déformation du support (sol meuble) et / ou de la roue (pneus)

7. Récapitulatif

On peut souvent analyser les problèmes en termes simples en se ramenant au mouvement d'un « point matériel » (comme si toutes les forces s'exerçaient ou même point, le centre de gravité)

On peut alors se contenter de relever les forces agissant sur ce « point » :

- le poids (la force gravitationnelle), toujours dirigé verticalement ;
- la force de liaison d'une corde, toujours dirigée selon la corde ;
- la réaction de chaque surface de contact, qui possède deux composantes :
 - une composante normale à la surface
 - une composante tangentielle, constituée par les forces de frottement (c'est leur définition).

En d'autres termes:

- en l'absence de frottements, la réaction du sol est purement normale, puisque par définition les frottements constituent la composante tangentielle de la réaction de la surface de contact;
- en présence de frottements, la réaction de la surface a une composante tangentielle, qui s'oppose au mouvement.

Si le mouvement est circulaire (en général : curviligne), la résultante des forces agissant sur le point matériel *doit* avoir une composante centripète : cette résultante centripète est responsable du mouvement curviligne, en s'opposant à l'inertie (mouvement rectiligne).

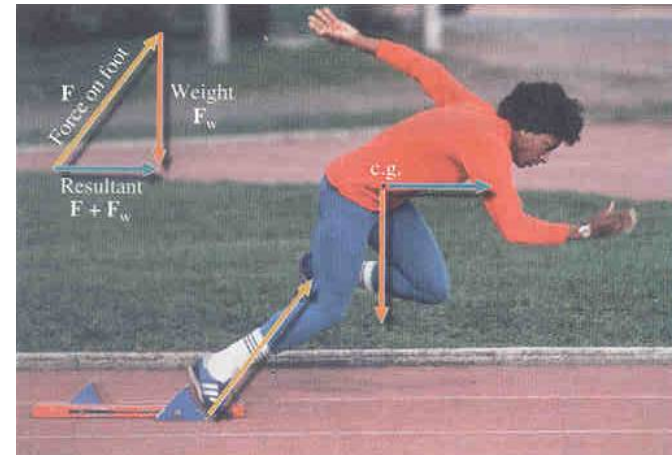
Un mouvement circulaire est *toujours* généré à travers la résultante centripète de la combinaison des forces *matérielles* agissant sur le corps, impliquant en particulier :

- une force d'attraction centrale (*centripète*), agissant à travers une liaison matérielle (corde) ou dans le vide (gravitation, attraction électrique);
- la réaction du support, à travers des frottements (basketteur, patineur) ou l'inclinaison du support par rapport à la verticale (coureur sur piste inclinée).

Poids + réaction du sol → accélération

Quelles forces s'exercent sur le coureur au moment du départ ?

1. la gravitation, qui le tire vers le bas
2. la force exercée par le starting-block sur le coureur, en *réaction* contre la poussée exercée par le coureur.
 - le coureur pousse avec sa jambe contre le starting-block
 - et, en réaction, le starting-block exerce sur le coureur une force opposée, de même norme et de même direction, celle de la jambe.



source : Hecht

Au total, la direction de la jambe et la poussée du coureur sont donc telles que :

1. la composante verticale de la réaction du starting-block compense exactement le poids du coureur (sinon il tomberait)
2. ... de sorte que la composante horizontale de la poussée du starting-block reste seule en jeu, et induise une accélération horizontale qui projette le coureur vers l'avant.

Notez bien que:

1. Il faut que toute la mécanique soit bien ajustée : le coureur doit ajuster son effort pour que la résultante le précipite vers l'avant ... et pas vers le haut (ce n'est pas un saut !) ni vers le bas (ne pas tomber !)
2. Le coureur exerce sur le starting-block une force supérieure à son poids, grâce à l'action de ses muscles (cf. le cas du saut vertical)
3. La réaction du starting-block doit s'exercer sur le coureur dans la même direction que la force exercée par le coureur sur le starting-block, c'est-à-dire la direction de sa jambe. Par contre, la réaction du starting-block n'est pas nécessairement perpendiculaire à sa surface : l'orientation de celui-ci ne joue qu'un rôle de commodité.

Plan incliné, sans frottements

Deux forces s'exercent sur la skieuse : la gravitation (son poids) et la réaction du sol.

1. On peut décomposer le poids de la skieuse en :

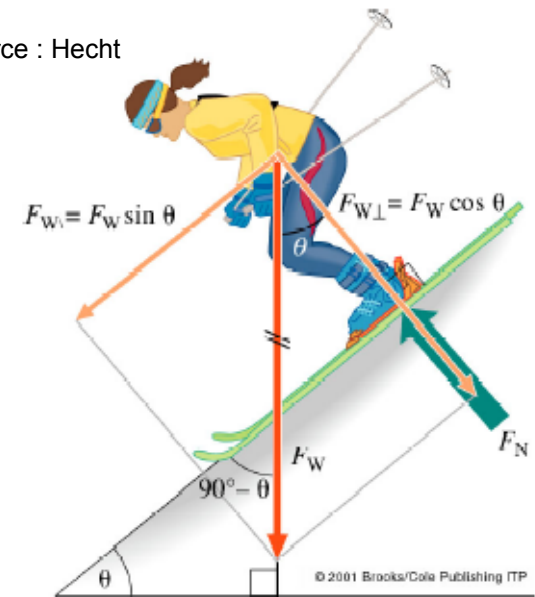
- une composante perpendiculaire au sol, de norme $F_{p\perp} = F_p \cos \theta$, qui tend à « enfoncer » la skieuse perpendiculairement dans le sol;
- une composante tangentielle, de norme $F_{p\parallel} = F_p \sin \theta$.

2. La réaction du sol est purement normale : $\vec{F}_R = F_N \vec{1}_N$.

En effet, il n'y a pas de frottements : le poids tend seulement à comprimer les unes sur les autres les couches d'atomes du sol, perpendiculairement à la piste, mais pas à les faire glisser l'une sur l'autre parallèlement à la piste.

La réaction des atomes du sol ne comporte donc pas de composante tangentielle (frottement).

source : Hecht



La composante normale de la réaction compense exactement la composante normale du poids (sinon il y aurait enfoncement).

Reste la composante tangentielle $F_{p\parallel}$ du poids, que rien ne compense, et qui provoque une accélération purement parallèle au sol, donnée par $ma_{\parallel} = F_{p\parallel} = F_p \sin \theta$.

Cette accélération est plus faible que celle de la pesanteur : le plan incliné ralentit le mouvement d'un facteur $\sin \theta$.

NB Le fait que la réaction soit purement normale se manifeste dans le fait que le centre de gravité de la skieuse est situé exactement sur la perpendiculaire au sol passant par le point de contact avec le sol.

Plan incliné avec frottements

Deux forces s'exercent sur l'alpiniste : la gravitation (son poids) et la réaction du sol.

1. On peut décomposer le poids en :

- une composante perpendiculaire au sol, qui tend à « enfoncer » l'alpiniste perpendiculairement *dans* le sol (en écrasant les unes sur les autres les couches d'atomes);
- une composante tangentielle, qui tend à faire glisser l'alpiniste *le long* de la pente, c.-à-d. à faire glisser les couches d'atomes les unes sur les autres.

2. La réaction du sol a également deux composantes actives :

- la composante normale (due à la réaction des couches d'atomes contre leur *écrasement*) est exactement opposée à la composante normale du poids et empêche l'enfoncement de l'alpiniste, comme dans le cas sans frottement;
- la composante parallèle au sol, due au frottement (c'est-à-dire la résistance des couches d'atomes à leur glissement les unes sur les autres), s'oppose au mouvement parallèle à la pente.



Le frottement peut

- soit empêcher complètement le mouvement (frottement statique supérieur à la composante tangentielle du poids);
- soit le ralentir (frottement cinétique).

Dans le cas présent, le frottement (statique ou cinétique) compense exactement la composante tangentielle du poids : il n'y a pas d'accélération (vitesse constante de glissade, éventuellement nulle).

Ceci se manifeste par le fait que le centre de gravité de l'alpiniste est situé exactement à la verticale du point de contact avec le sol.

Mouvement circulaire avec frottements

Dans les deux cas illustrés, les sportifs exercent sur le sol (c.-à-d. sur les atomes du sol) deux forces :

1. une force due à leur poids, qui tend à déplacer les atomes verticalement
2. une force due à leur mouvement inertiel, en ligne droite, qui tend à déplacer les atomes horizontalement.

Le sol réagit donc doublement (force de réaction) :

1. il ne laisse pas les sportifs s'enfoncer : composante verticale de la réaction des atomes, qui compense le poids des athlètes;
2. il ne laisse pas les sportifs continuer leur mouvement tout droit, c.-à-d. en mouvement inertiel : la composante horizontale de la réaction des atomes à la force exercée sur eux = frottement.

(NB. la glace exerce sur le patin une force de frottement négligeable dans l'axe du patin, mais pas négligeable dans la direction perpendiculaire !)

Résultante des forces exercées sur les sportifs (gravitation et réaction du sol) : seule reste active la composante horizontale, centripète, de la réaction du sol, qui induit un mouvement circulaire.

La direction de la réaction du sol est indiquée par l'inclinaison du patin / par celle de la jambe du basketteur : le sol réagit dans la direction de l'action qui s'exerce sur lui. Inversement, l'inclinaison du patin et celle de la jambe donnent la direction de la réaction du sol, dont on peut déduire que les athlètes suivent une trajectoire curviligne.



source : Hecht



Mouvement circulaire sans frottement : sol incliné

Course sur une piste circulaire inclinée, sans frottements.

Le coureur exerce deux effets sur le sol (c.-à-d. sur les atomes du sol) :

1. l'effet dû à son poids (action verticale);
2. l'effet dû à son mouvement inertiel (action horizontale).

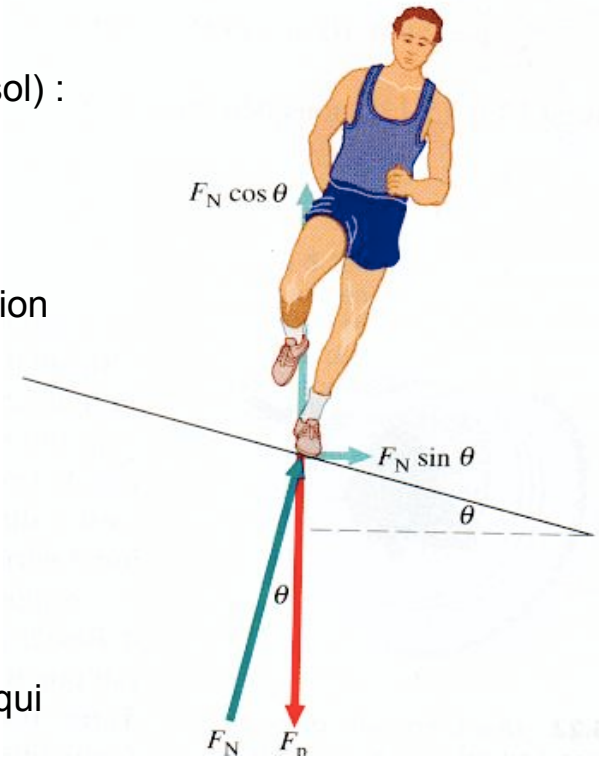
En l'absence de frottements, le sol réagit uniquement dans la direction normale au sol.

Comme celui-ci est incliné, cette réaction normale du sol a une composante verticale et une composante horizontale :

- la composante verticale compense le poids du coureur
- la composante horizontale fournit la force centripète correspondant à son mouvement circulaire.

Remarquer que la jambe du coureur est perpendiculaire au sol, ce qui montre que la réaction est purement normale / que les frottements ne jouent aucun rôle.

Si la jambe n'était pas perpendiculaire à la piste (c.-à-d. si le centre de gravité du coureur n'était pas dans la direction de la jambe), des frottements devraient intervenir en outre pour assurer le mouvement circulaire.



source : Hecht

III. Gravitation

1. Loi de la gravitation de Newton
2. Lois de Kepler
3. Mesures de g sur Terre
4. Les marées

1. Loi de la gravitation de Newton

$$\text{Loi de Newton : } \vec{F}_G = -G \frac{m M}{r^2} \vec{1}_r$$

m, M = masses des corps en attraction

(masse pesante = masse inerte)

la force est dirigée selon la direction joignant les masses en interaction

$G = 6,67259 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ (mesure par la balance à torsion de Cavendish)

Propriétés

- l'attraction exercée par un corps à symétrie sphérique est la même que si toute sa masse était concentrée en son centre
- sur un point situé à l'intérieur d'un corps à symétrie sphérique, seule joue l'attraction des couches situées à plus grande profondeur

remarques

- ne pas confondre « chute libre » et « apesanteur »
- aux « points de Lagrange », les forces de gravitation s'annulent

2. Lois de Kepler

1. Les planètes décrivent des orbites elliptiques, le Soleil (ou plutôt leur *centre de masse commun*, très proche du centre du Soleil) étant en l'un des foyers (cf. comètes)

En général, orbites dans un champ de gravitation = coniques : ellipses, paraboles ou hyperboles (orbite s'éloigne à l'infini, corps échappe à l'attraction).

(ceci = propriété des forces en $1/r^2$ - triomphe de Newton)

2. Loi des aires : le rayon vecteur joignant le Soleil à la planète balaie des aires égales en des temps égaux

conservation du moment cinétique $\vec{L}_S = \vec{r} \times m\vec{v}$ (v. plus loin) – caractéristique d'une force centrale

3. Pour toutes les planètes :

$$\frac{r_{SP}^3}{T_P^2} = \text{cte} = \frac{G M_S}{4 \pi^2} = \frac{(1UA)^3}{(1\text{année})^2}, \text{ où } 1UA = r_{ST} ; 1,5 \cdot 10^8 \text{ km}$$

(dém. pour cas particulier des orbites circulaires : $|\vec{F}| = m\omega^2 r = G \frac{Mm}{r^2}$)

Satellites :

- vitesse orbitale (circulaire) $v_o = \sqrt{\frac{GM}{r}}$

- orbites géostationnaires : au-dessus de l'équateur, altitude fixe : $h = 36 \cdot 10^3 \text{ km}$

3. Effets gravitationnels sur Terre

Poids $\vec{F}_P = m \vec{g}$, selon la direction de la verticale (par déf.)

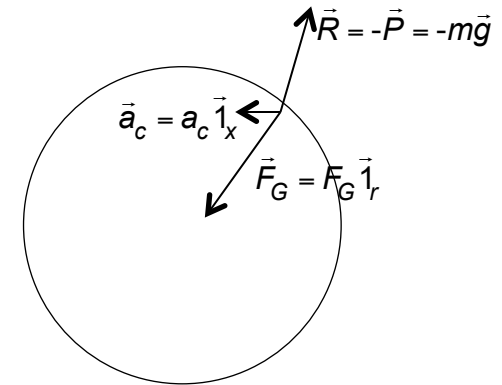
Variation du poids avec l'altitude : pour $\Delta R \ll R$: $\frac{\Delta g}{g} \cong \frac{2 \Delta R}{R}$

Mesure : gravimètre (précision atteint 10^{-8})

1. rotation de la Terre

$$m \vec{a}_c = \vec{F}_G + \vec{R} = \vec{F}_G - \vec{F}_P \Rightarrow \vec{g} = \frac{G M_T}{R_T^2} \vec{1}_r - m \omega^2 r_x \vec{1}_x$$

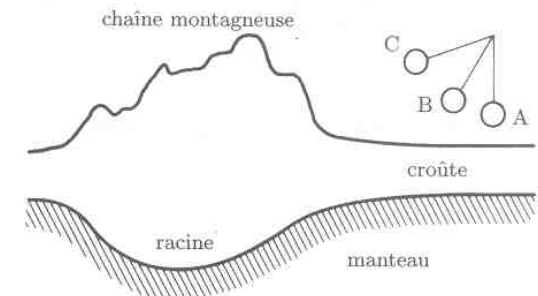
NB $\vec{1}_x \neq \vec{1}_r$ $r_x \neq R_T$



légère modification du poids des corps et de la direction de la verticale locale

2. aplatissement de la Terre de 21,5 km

3. mais valeur théorique modifiée par effets de masses (montagnes etc.) et variations de la densité



4. Les marées



La Terre « tombe » en chute libre vers la Lune (ou plutôt vers leur centre de masse commun) avec une accélération centripète qui est la même en A, B et C (la Terre « tombe » sur la Lune comme un tout) :

$$a_c(A) = a_c(B) = a_c(C)$$

(Cette accélération centripète est donnée par la loi de la gravitation de Newton, comme si toute la masse de la Terre était concentrée en son centre C)

La force exercée par la Lune sur chaque point de la Terre donne naissance à la force centripète + la force de marée en ce point

$$\Rightarrow F_{G,L}(B) = m a_c(B) + F_{marée}(B) = m a_c(C) + F_{marée}(B)$$

$$F_{G,L}(A) = m a_c(A) + F_{marée}(A) = m a_c(C) + F_{marée}(A)$$

Or la force exercée par la Lune dépend de la distance :

$$F_{G,L}(B) > F_{G,L}(C) > F_{G,L}(A)$$

$$\Rightarrow F_{marée}(B) \text{ vers la Lune (s'ajoute à } m a_c(C)) \text{ et } F_{marée}(A) \text{ opposée à la Lune (se soustrait)}$$

Les « forces de marée », dirigées vers la Lune en B et opposées en A → 2 bourrelets
→ compte tenu de la rotation quotidienne de la Terre, 2 marées par jour

Les marées

- marées dues principalement à la Lune (2,3 fois l'effet du Soleil)
- les 2 effets s'opposent à la pleine Lune et se conjuguent à la nouvelle Lune
- effets complexes des reliefs marins → grande variabilité de l'amplitude

Marées → frottements

→ dissipation d'énergie

→ ralentissement de la rotation diurne, accroissement du jour terrestre

« blocage » (p.ex. de la Lune vers la Terre)

→ accroissement de la distance Terre - Lune

(conservation du moment cinétique du système)

Autres effets « de marée »

- fragmentation d'une comète

- stabilisation d'un satellite en lui attachant une longue perche terminée par une masse

- effets très fort à proximité d'une étoile à neutrons

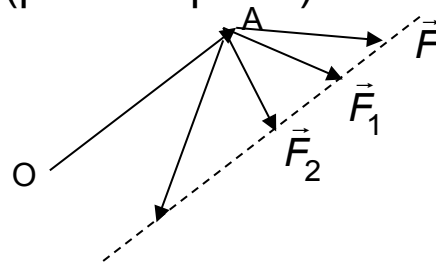
IV. Statique

1. Moment d'une force
2. Lois de la statique
3. Centre de gravité

1. Moment d'une force

Une force F s'appliquant au point A d'un corps peut mettre celui-ci en rotation autour d'un poids O si et seulement elle agit avec un certain « bras de levier », qui est la distance entre le point O et la ligne d'action de la force (passant par A).

Toutes les forces F , F_1 , F_2 etc. ont la même capacité à créer une rotation autour de O car elles sont appliquées au même point A et ont le même « bras de levier » (leur composante perpendiculaire au vecteur \vec{OA} est la même)



Le moment, par rapport à un point O , d'une force \vec{F} appliquée au point A , mesure sa capacité à faire tourner le corps autour de ce point :

$$\begin{aligned}\vec{\tau}_O(\vec{F}) &= \text{moment de la force } \vec{F}, \text{ appliquée au point } A, \text{ par rapport au point } O \\ &= \vec{OA} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} = r F \sin\theta(\vec{r}, \vec{F}) \vec{1}_\perp = r_{proj} F \vec{1}_\perp = r F_{proj} \vec{1}_\perp\end{aligned}$$

où \vec{r} = vecteur joignant le point O au point d'application de \vec{F}

r_{proj} = projection de \vec{r} sur \vec{F} F_{proj} = projection de \vec{F} sur \vec{r}

$\vec{1}_\perp$ perpendiculaire au plan (\vec{r}, \vec{F}) , orienté selon la règle :

$\vec{1}_x \times \vec{1}_y = \vec{1}_z$ avec x, y dans le plan horizontal, sens trigono., z vers le haut
(convention habituelle)

Le moment d'une force par rapport à tout point situé sur sa ligne d'action est nul

Dimensions : $N.m = kg \ m^2 \ s^{-2}$

2. Lois de la statique

1. Pas de translation globale

$$m \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \sum \vec{F}_{ext} = 0$$

NB.: doit être vrai en *chaque* point du système rigide

Attention : somme des forces appliquées sur l'objet (en part. forces de réaction du support sur l'objet) – ne concerne pas les forces exercées par l'objet sur les supports

Applications

poulies (force distribuée selon le nombre de brins)

ponts (poutres -> résistance à la compression, câbles -> résistance à la traction)

2. Pas de rotation

$$\sum \vec{r}_O(\vec{F}_{ext}) = 0$$

par rapport à *n'importe quel* point O

Applications : balances, leviers, potences, etc.

Théorème de la statique :

si la somme des forces extérieures est nulle et si la somme de leurs moments par rapport à un point donné O est nulle, alors celle-ci est également nulle par rapport à n'importe quel point P

$$\sum_i \vec{\tau}_O(\vec{F}_i) = \sum_i \overrightarrow{OA_i} \times \vec{F}_i \quad \text{où } \vec{F}_i = \text{forces extérieures de point d'application } A_i$$

$$\sum_i \vec{\tau}_P(\vec{F}_i) = \sum_i \overrightarrow{PA_i} \times \vec{F}_i = \sum_i (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA_i}) \times \vec{F}_i = \overrightarrow{PO} \times (\sum_i \vec{F}_i) + \sum_i \overrightarrow{OA_i} \times \vec{F}_i = 0 + \sum_i \vec{\tau}_O(\vec{F}_i) = 0$$

Pour démontrer qu'un corps est en équilibre, il suffit donc de démontrer que la résultante des forces extérieures est nulle et que la somme de leurs moments par rapport à un point O choisi arbitrairement est nulle.

Théorème :

si un corps sur lequel s'appliquent 3 forces extérieures, situées dans un même plan et non parallèles, est au repos, alors ces forces sont concourantes.

Puisque le corps est au repos, la somme des moments des forces par rapport à n'importe quel point est nulle.

Considérons le point O défini par l'intersection des droites portant deux des forces. Les moments de ces deux forces par rapport à O est nul (puisque O est sur leur ligne d'action).

Le moment de la troisième force par rapport à O doit donc être nul également ; la droite portant cette force doit donc également passer par O.

3. Centre de gravité d'un corps

Point tel que, par rapport à lui, le moment total de la force gravitationnelle est nul
(c.-à-d. que la somme des moments des poids de tous les points constituant le système est nul)

Autrement dit : on peut considérer le CG comme le point d'application de la force de gravitation globale

Coordonnées du CG :

$$\sum_i \vec{r}_{CG}(\vec{P}_i) = \vec{r}_{CG}(\vec{P}_{tot}) = \sum_i m_i g x_i = M_{tot} g x_{CG}$$

$$x_{CG} = \frac{\sum_i m_i x_i}{M_{tot}} = \frac{\int x dm}{M_{tot}} \quad ; \text{ de meme } \quad y_{CG} = \frac{\sum_i m_i y_i}{M_{tot}} = \frac{\int y dm}{M_{tot}}$$

Le système est à l'équilibre dans le champ gravitationnel si et seulement si le CG est situé à la verticale de la réaction du support

(sinon un moment de forces se forme)

Équilibre stable : pour un petit écart, CG s'élève

instable :

CG est abaissé

indifférent :

CG reste à la même hauteur

V. Rotation des solides

1. cinématique; roulement sans glissement
2. moment d'inertie
3. centre de masse; séparation des mouvements
4. dynamique de la rotation
5. moment cinétique; conservation du moment cinétique

1. Cinématique de la rotation

Solide = système indéformable de points matériels

Pour un solide en rotation autour d'un axe, la distance r entre chaque point du solide et l'axe de rotation est constante

➤ angles exprimés en radians (pas une véritable unité : pas de dimensions)

$$\theta = \frac{l}{r} \Leftrightarrow l = r \theta, \text{ où } l = \text{longueur de l'arc de cercle de rayon } r \text{ sous-tendu par l'angle } \theta$$

➤ vitesse angulaire (scalaire) (unités : $rad\ s^{-1}$, ou tour / seconde = $2\pi\ s^{-1}$)

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Leftrightarrow v = r \frac{d\theta}{dt} = r \omega$$

Il est commode de définir un vecteur $\vec{\omega}$ de longueur proportionnelle à la norme ω de la vitesse angulaire, et dirigé selon l'axe de rotation z , dans le sens positif de z pour une rotation dans le sens trigonométrique x vers y

$$\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt} \vec{1}_z$$

➤ accélération angulaire

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{1}_z \Leftrightarrow \vec{a}_T \vec{1}_z = \frac{d|\vec{v}|}{dt} \vec{1}_z = r\vec{\alpha} = r\alpha \vec{1}_z \Leftrightarrow \vec{a}_T = r\alpha \quad \alpha \text{ en } rad\ s^{-2}$$

Accélération constante

$$v = a_T t + v_0$$

OU

$$\omega = \alpha t + \omega_0$$

$$l = \frac{1}{2} a_T t^2 + v_0 t + l_0$$

$$\theta = \frac{1}{2} \alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0$$

$$l = \frac{1}{2} (v_0 + v_f) t + l_0 = v_m t + l_0$$

$$\theta = \frac{1}{2} (\omega_0 + \omega_f) t + \theta_0 = \omega_m t + \theta_0$$

$$v^2 = v_0^2 + 2 a_T (l - l_0)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2 \alpha (\theta - \theta_0)$$

- l et θ sont les *distances parcourues* par un point (par contre, le déplacement = position finale – position initiale, peut être nul même pour un mouvement qui a duré)
- a_T v l α ω θ sont des quantités algébriques (ont un signe)
- $\vec{\omega} = \vec{\alpha} t + \vec{\omega}_0$, les vecteurs $\vec{\omega}$ et $\vec{\alpha}$ étant dirigés selon l'axe de rotation

Roulement sans glissement

(roue sur le sol ou corde s'enroulant autour d'un axe)

- le point central parcourt, dans un même temps, la même distance (scalaire) que tout point de la jante => ils ont la même vitesse scalaire, et la grandeur de l'accélération du centre est égale à celle de l'accélération tangentielle de la jante
- la vitesse instantanée par rapport au sol du point de la jante qui touche le sol est nulle

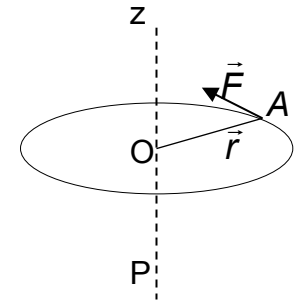
2. Moment d'inertie

➤ Pour un point matériel en rotation autour de l'axe z , à la distance r de l'axe, subissant l'action d'une force tangentielle \vec{F} (c.-à-d. qui est dans le plan perpendiculaire à l'axe), le moment de la force par rapport au point O de l'axe situé dans le plan de \vec{F} est

$$\vec{\tau}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = r F \vec{1}_z = r m a_T \vec{1}_z = m r^2 \vec{\alpha} = I_O \vec{\alpha}$$

On définit $I_O = m r^2$ comme le moment d'inertie par rapport à O

dimensions : $kg \ m^2$



➤ Moment d'inertie d'un système de points par rapport à un point O :

$$I_O = \sum_i m_i r_i^2 = \int r^2 dm = \int r^2 \rho(r) dV$$

- Moment d'inertie d'un système de points par rapport à un axe z :

$$I_z = \sum_i m_i r_i^2 = \int r^2 dm \quad \text{où } r_i \text{ est la distance du point } i \text{ de masse } m_i \text{ à l'axe } z$$

- Corps homogènes de masse M et de rayon R , tournant autour de leur axe de symétrie (voir p. suivantes et Hecht, tableau 8.3 p. 282) :

on trouve $I_z \propto MR^2$

cf. aussi analyse dimensionnelle

Principe de Huygens

Moment d'inertie d'un solide de masse M en rotation autour d'un axe D , parallèle à un axe de symétrie passant par le centre de masse et situé à la distance d de celui-ci :

$$I_D = I_{CM} + M d^2$$

Dém. :
$$I_D = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i (\vec{r}_i)^2 = \sum_i m_i (\overline{O}i)^2 = \sum_i m_i (\overline{O}P_S + \overline{P_S}i)^2$$

où O est sur l'axe D et P_S est sur l'axe de symétrie

$$= \sum_i m_i d^2 + 2 \sum_i m_i \overline{O}P_S \cdot \overline{P_S}i + \sum_i m_i \overline{P_S}i^2 = M d^2 + 2 \overline{O}P_S \cdot (\sum_i m_i \overline{P_S}i) + I_{CM}$$

le 2ème terme est nul par définition du CM

Quelques moments d'inertie

1. Tige de masse M et de longueur L tournant autour de son extrémité

$$I_O = \int_{\text{tige}} r^2 dm \qquad dm = \rho_x dx = \frac{M}{L} dx$$

$$I_O = \int_0^L x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{M}{L} \frac{x^3}{3} \Big|_0^L = \frac{1}{3} M L^2$$

2. Tige de masse M et de longueur L tournant autour de son centre

$$I_O = 2 \int_0^{L/2} x^2 \frac{M}{L} dx = 2 \frac{M}{L} \frac{x^3}{3} \Big|_0^{L/2} = \frac{1}{12} M L^2$$

3. Disque de masse M et de rayon R tournant autour de son centre

$$I_O = \int_{\text{disque}} r^2 dm \qquad dm = \rho_S dS = \frac{M}{\pi R^2} dS$$

où élément de surface dS = aire comprise entre 2 cercles de rayons r et $r + dr \Rightarrow dS = 2\pi r dr$

$$I_O = \int_0^R r^2 2 \frac{M}{R^2} r dr = 2 \frac{M}{R^2} \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = \frac{1}{2} M R^2$$

4. Cylindre de masse M , de rayon R et de hauteur H tournant autour de son axe

$$I_O = \int_{cyl} r^2 dm \quad dm = \rho_V dV = \frac{M}{\pi R^2 H} 2\pi r dr dz = 2 \frac{M}{R^2 H} r dr dz$$

$$I_O = \int_0^H \int_0^R r^2 2 \frac{M}{R^2 H} r dr dz = 2 \frac{M}{R^2 H} H \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{1}{2} M R^2$$

5. Sphère de masse M et de rayon R tournant autour d'un axe passant pas son centre

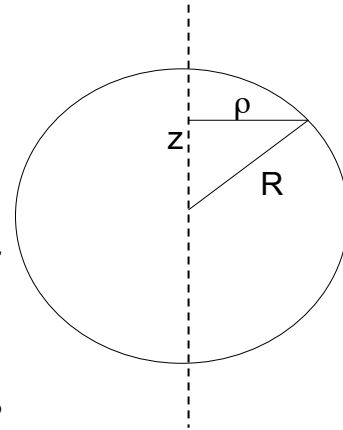
$$I_O = \int_{sphère} r^2 dm \quad dm = \rho_V dV = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} dV$$

$$I_O = 2 \frac{3M}{4\pi R^3} \int_0^R \int_0^\rho r^2 2\pi r dr dz = \frac{3M}{R^3} \int_0^R \left[\int_0^\rho r^2 r dr \right] dz = \frac{3M}{R^3} \int_0^R \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^\rho dz = \frac{3M}{R^3} \int_0^R \frac{\rho^4}{4} dz$$

$$\text{Or } \rho^2 = R^2 - z^2$$

$$I_O = \frac{3M}{4R^3} \int_0^R (R^2 - z^2)^2 dz = \frac{3M}{4R^3} \int_0^R (R^4 - 2R^2 z^2 + z^4) dz = \frac{3M}{4R^3} \left(R^4 z - 2R^2 \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} \right) \Bigg|_0^R$$

$$I_O = \frac{3M}{4R^3} R^5 \left(\frac{15 - 10 + 3}{15} \right) = \frac{2}{5} M R^2$$



3. Centre de masse

Centre de masse

Point tel que le système se comporte, sous l'action de forces extérieures, comme si toute sa masse y est concentrée.

Des forces extérieures appliquées au centre de masse ne font pas tourner le système.

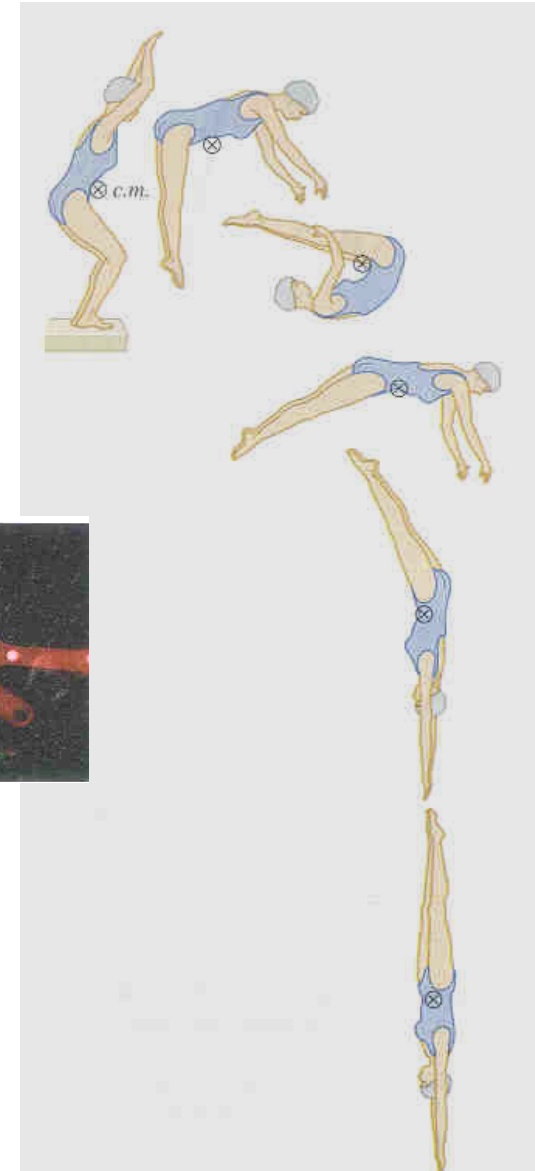
C'est le « point moyen » du système, les distances (vectorielles) de tous les points étant pondérées par leur masse.

Principe de séparation

On peut toujours traiter séparément

- le mouvement de translation globale du système, défini par la translation de son centre de masse
- le mouvement de rotation du corps autour du centre de masse.

Séparation du mouvement de translation du cm et du mouvement de rotation autour du CM



source : Hecht

4. Dynamique de la rotation

Première loi de Newton

Si la somme des moments des forces extérieures s'exerçant sur un corps est nulle, celui-ci persiste dans son état de rotation

Deuxième loi de Newton

Sous l'action d'une force extérieure \vec{F} de moment $\vec{\tau}_O(\vec{F})$ par rapport à un axe qui lui est perpendiculaire, un corps de moment d'inertie I_z par rapport à cet axe se met en rotation autour de lui avec une accélération angulaire $\dot{\alpha}$ telle que

$$|\vec{\tau}_O(\vec{F})| \hat{1}_z = I_z \dot{\alpha} \quad ; \quad \text{en part. } \vec{\tau}_O = I_z \dot{\alpha} \quad \text{pour une rotation autour d'un axe de symétrie}$$

Le **moment d'inertie** I joue, pour la rotation, le rôle de la **masse d'inertie** m pour la translation : résistance au changement de mouvement :

$$\text{comparer } \vec{\tau}_O = I_O \dot{\alpha} \quad \text{et} \quad \vec{F} = m \vec{a}$$

Exemples :

- moment d'inertie de la poulie diminue l'accélération pour le mouvement couplé
- moment d'inertie de la sphère diminue son accélération sur un plan incliné par rapport à l'accélération pour un simple glissement

5. Moment cinétique

(ou « moment de la quantité de mouvement », ou « moment angulaire » ; en anglais : « angular momentum ») par rapport à un point O

- point matériel

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p} = r \cdot p \cdot \sin(\vec{r}, \vec{p}) = I_O \vec{\omega} \quad \text{cf. } \vec{p} = m \vec{v}$$

- système :

$$\vec{L}_O = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

- système en rotation autour d'un axe de symétrie z :

en raison de la symétrie du système, seule compte la composante du vecteur perpendiculaire à l'axe de rotation

$$\vec{L}_O = I_z \vec{\omega}$$

Autre forme de la deuxième loi de Newton

$$\vec{\tau}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt} \quad \text{cf. } \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Conservation du moment cinétique

Lorsque le moment résultant des forces extérieures agissant sur un système est nul, le moment cinétique du système reste constant (en module et en direction) : son mouvement de rotation reste inchangé.

C'est une loi fondamentale de la physique, liée à l'isotropie de l'espace (pas de direction privilégiée)

Conséquences et applications

- accélération de la rotation des patineurs; tornades; pulsars
- loi des aires de Kepler
- ralentissement de la rotation de la Terre (marées) → augmentation de la distance Terre – Lune
- nécessité d'une deuxième hélice pour empêcher rotation sur lui-même d'un hélicoptère
- stabilisation d'un satellite en rotation
- mouvements opposés des bras et des jambes dans saut en longueur
- faire tourner une plate-forme en modifiant le moment d'inertie ; chute d'un chat
- stabilité gyroscopique

Toupie

rotation rapide + pesanteur → précession autour de la verticale (et nutation)

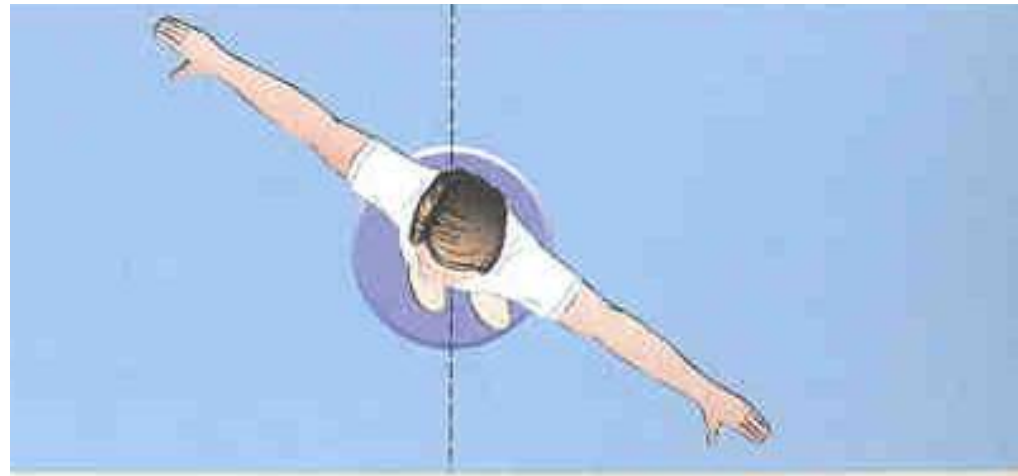
cf. Terre : précession des équinoxes

rotation d'une plateforme



position initiale

1. rotations en sens inverses du haut et du bas du corps, bras écartés



2. nouvelles rotations, ramenant le haut et le bas du corps dans le même plan, bras le long du corps.

Résultat : rotation de l'angle θ



source : Benson

Conservation du moment cinétique : $\Delta L = \Delta L_{bas} + \Delta L_{haut} = 0$

$$\Rightarrow I_b \omega_b + I_h \omega_h = 0 \Rightarrow \text{à chaque instant : } \frac{\omega_b}{\omega_h} = \frac{d\theta_b / dt}{d\theta_h / dt} = -\frac{I_h}{I_b} \Rightarrow \text{finalement : } \frac{\Delta\theta_b}{\Delta\theta_h} = -\frac{I_h}{I_b}$$

1. Rotation bras écartés, bas dans un sens, haut dans l'autre sens (conserv. mom. cin.)

$$\Delta\theta_b^{(1)} = -\frac{I_h^{(1)}}{I_b^{(1)}} \Delta\theta_h^{(1)} = -\frac{I_h^{(1)}}{I_b} \Delta\theta_h^{(1)} \quad \text{car } I_b^{(1)} = I_b^{(2)} = I_b$$

2. Rotations en sens inverse

$$\Delta\theta_b^{(2)} = -\frac{I_h^{(2)}}{I_b} \Delta\theta_h^{(2)}$$

Cette rotation a ramené le bas et le haut dans le même plan

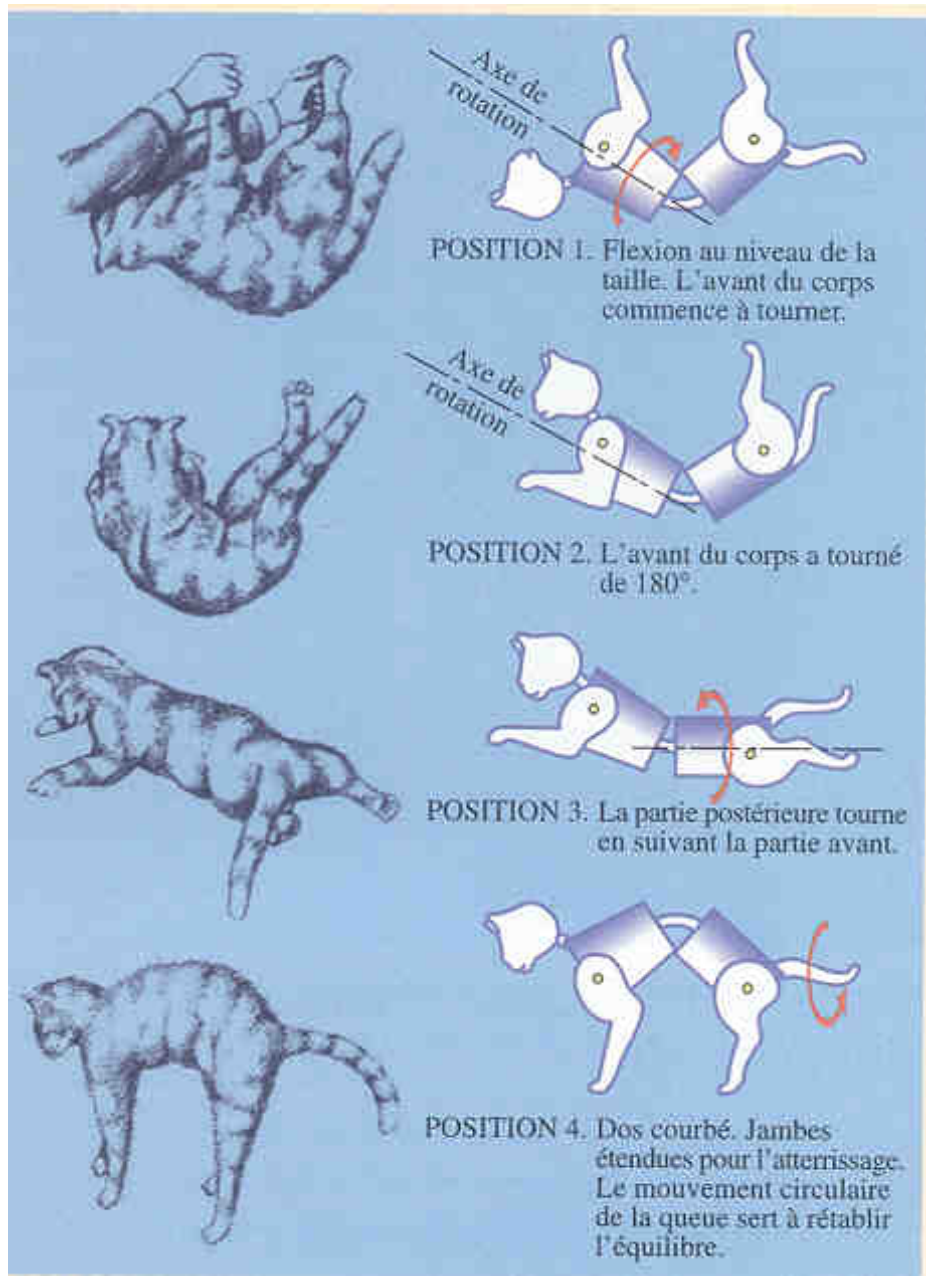
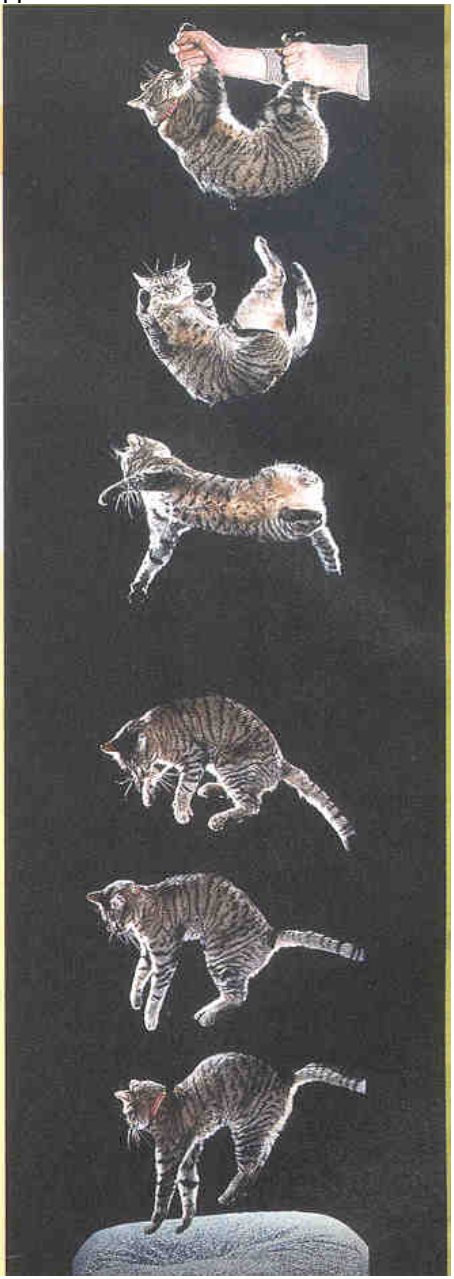
$$\Delta\theta = \Delta\theta_b^{(1)} + \Delta\theta_b^{(2)} = \Delta\theta_h^{(1)} + \Delta\theta_h^{(2)} = -\frac{I_h^{(1)}}{I_b} \Delta\theta_h^{(1)} - \frac{I_h^{(2)}}{I_b} \Delta\theta_h^{(2)}$$

NB : les angles ont des signes !

$$\Rightarrow \Delta\theta_h^{(1)} \left(1 + \frac{I_h^{(1)}}{I_b} \right) = -\Delta\theta_h^{(2)} \left(1 + \frac{I_h^{(2)}}{I_b} \right) \Rightarrow \frac{\Delta\theta_h^{(1)}}{I_b + I_h^{(2)}} = -\frac{\Delta\theta_h^{(2)}}{I_b + I_h^{(1)}} = \frac{\Delta\theta_h^{(1)} + \Delta\theta_h^{(2)}}{I_h^{(2)} - I_h^{(1)}} \quad \text{car } \frac{a}{b} = \frac{c}{-d} = \frac{a+b}{c-d}$$

$$\Rightarrow \Delta\theta = \Delta\theta_h^{(1)} \frac{I_h^{(2)} - I_h^{(1)}}{I_b + I_h^{(2)}} = \Delta\theta_h^{(2)} \frac{I_h^{(2)} - I_h^{(1)}}{I_b + I_h^{(1)}}$$

Source :
Benson



toupie

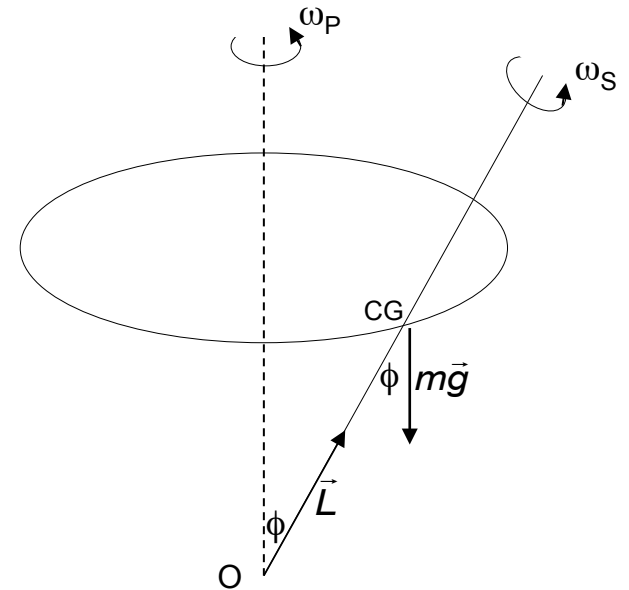
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_O(m\vec{g}) = \vec{r}_{CG} \times m\vec{g} = r_{CG} mg \sin\phi \vec{1}_\perp \quad (1)$$

$\Rightarrow d\vec{L}$ horizontal et perpendiculaire à \vec{r}_{CG}

$$\text{Si } \omega_S \gg \omega_P \rightarrow \vec{L} = I \vec{\omega}_S \text{ dirigé selon } \vec{r}_{CG} \quad (2)$$

$\Rightarrow d\vec{L}$ horizontal et perpendiculaire à \vec{L}

mouvement circulaire du CG dans le plan horizontal

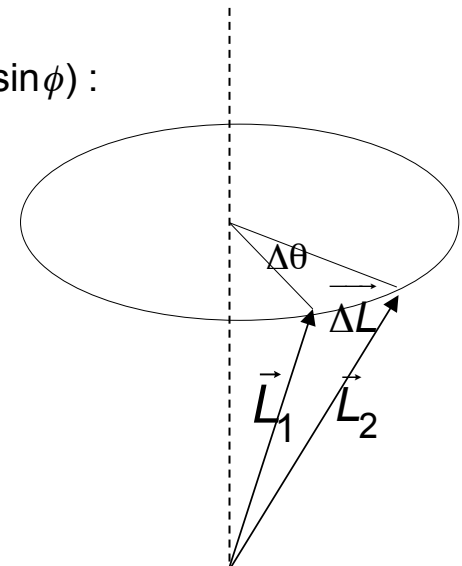


On a (définition de l'angle θ en radians sur le cercle de rayon $L \sin\phi$) :

$$\Delta\theta = \Delta L / L \sin\phi$$

$$\Rightarrow \omega_P = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{L \sin\phi} \frac{dL}{dt} = \frac{1}{L \sin\phi} \tau = \frac{r_{CG} mg \sin\phi}{L \sin\phi} \text{ par (1)}$$

$$\Rightarrow \omega_P = \frac{r_{CG} mg}{I \omega_S} \text{ par (2)}$$



VI. Travail - Énergie

1. Travail d'une force; puissance; forces conservatives et non conservatives
2. Énergie cinétique
3. Énergie potentielle
 - définition
 - énergie potentielle gravitationnelle
 - oscillateur harmonique; ressort
 - notion de « potentiel »
4. Conservation de l'énergie mécanique
5. Collisions

1. Travail d'une force

Le **travail** est dû au déplacement du point d'application d'une force :

- trajectoire rectiligne, force constante :

$$W_{AB} = \vec{F} \cdot \vec{l} = F l \cos \theta(F, l)$$

NB seule travaille la composante de la force dirigée selon le mouvement :
produit scalaire

- en général :

$$W_{AB} = \int_{\widehat{AB}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

- le travail d'une force est *positif* si le mouvement se fait *dans le sens* de la force; c'est la force qui travaille

Puissance

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt};$$

$$\text{si } F \text{ constante : } P = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Dimensions : travail : 1 J = 1 N.m = 1 kg m² s⁻² ;

puissance : 1 W = 1 J/s

Forces conservatives : le travail ne dépend pas du chemin suivi \leftrightarrow ne dépend que des positions initiale et finale \leftrightarrow est nul sur une trajectoire fermée
ex.: gravitation, champ électrique, élasticité

Forces non-conservatives - ex.: frottements

Remarques

- le travail dépend du référentiel (pour deux réf. inertiels, la force est la même, mais pas le déplacement)
- le travail des forces de frottement peut être positif (ex. : frottement statique qui empêche le glissement par inertie d'une charge sur un camion qui accélère)
- les forces de réaction, indispensables pour permettre le mouvement, ne travaillent pas nécessairement (le travail peut provenir de l'énergie interne)
- marche horizontale : il faut fournir un travail contre la gravitation, car il faut soulever à chaque pas le centre de gravité
- pour supporter une masse immobile, pas de travail mécanique, mais fatigue physiologique due à la (re-)contraction des muscles striés (qui donc travaillent)

2. Énergie cinétique

Travail fourni par une force pour accélérer un corps = variation de l'énergie cinétique (ou « force vive ») du corps

$$W = E_{c,f} - E_{c,i} = \Delta E_c \quad \text{où} \quad E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

Énergie cinétique de rotation $E_c = \frac{1}{2} I \omega^2$

En général : translation du CM + rotation du corps

$$E_c = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

3. Énergie potentielle

Énergie « emmagasinée » dans un corps suite à un déplacement dans un champ de forces conservatives, égale au travail nécessaire pour vaincre la force.

Énergie potentielle *augmente* si du travail a dû être fourni contre la force
↔ on pourra donc le récupérer en laissant agir la force

$$\Delta E_p = \Delta W = - \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

W = travail fourni au corps contre la force = - travail de la force

On ne mesure que les variations d'énergie potentielle

Énergie potentielle gravitationnelle

- champ gravitationnel constant

$$\Delta E_{P,G} = - \int_i^f m \vec{g} \cdot d\vec{r} = -(-mg)(z_f - z_i) = mg \Delta z$$

$$E_{P,G} = mgz \quad (+ \text{cte, prise } = 0 \text{ pour } z = 0)$$

(axe z vers le haut)

- champ gravitationnel variable

$$\Delta E_{P,G} = - \int_i^f \vec{F}_G \cdot d\vec{r} = - \int_i^f \left(-\frac{GmM}{r^2} \vec{1}_r \right) \cdot d\vec{r} = \int_i^f \frac{GmM}{r^2} dr = -GmM \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right)$$

$$E_{P,G} = -\frac{GmM}{r} \quad (\text{commode de prendre } E_{P,G} = 0 \text{ pour } r = \infty)$$

NB.: pour $h \ll R_T$

$$E_{P,G} = -\frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{R_T + h} = -\frac{GMm}{R_T \left(1 + \frac{h}{R_T}\right)} \approx -\frac{GMm}{R_T} \left(1 - \frac{h}{R_T}\right) = (C^{\text{te}} +) \frac{GMm}{R_T^2} h = mgh$$

Énergie potentielle élastique

force de rappel élastique – oscillateur harmonique

$$\vec{F}_R = -k x \vec{1}_x \quad \text{où } x = \text{écart} \text{ par rapport à la position d'équilibre}$$

$$\Delta E_{P,R} = -\int_i^f (-k x \vec{1}_x) \cdot d\vec{x} = \int_i^f k x dx = \frac{1}{2} k x^2$$

En général, pour les forces conservatives on définit un « **potentiel** »

$$U = -\int \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} (+C^{te}) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F} = -\vec{\nabla}U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \vec{1}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{1}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{1}_z\right)$$

- forces centrales (dirigées vers le centre et ne dépendant que de la distance au centre) dérivent toujours d'un potentiel (sont conservatives)

- forces en $\frac{1}{r^2} \Leftrightarrow$ potentiel en $\frac{1}{r}$ (champ gravitationnel, champ électrique)

4. Conservation de l'énergie mécanique

L'énergie totale de tout système isolé reste constante

(mais l'énergie peut changer de forme)

(principe fondamental de la physique – cf. homogénéité du temps)

↔ tout changement d'énergie d'un système est dû au travail de forces extérieures

En particulier, si aucune autre force n'agit : conservation de l'énergie mécanique :

$$E_{méca} = E_c + E_{P,G} + E_{P,R} = \text{constante}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} m v^2 + m g h + \frac{1}{2} k x^2 \right)_i = \left(\frac{1}{2} m v^2 + m g h + \frac{1}{2} k x^2 \right)_f$$

Applications

vitesse maximum d'un ressort oscillant sur la longueur l :

$$E(0) = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 + 0 = E(l) = 0 + \frac{1}{2} k l^2 \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\frac{k}{m}} l$$

vitesse de libération d'un satellite

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GmM}{R} \geq 0 \text{ à l'infini} \Rightarrow v_{lib} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} ; 11 \text{ km/s à la surface de la Terre}$$

5. Collisions

- collisions totalement inélastiques (par définition $\vec{v}_{1f} = \vec{v}_{2f} = \vec{v}_f$)

Pour simplifier, on prend $v_{2i} = 0$

Conservation de la qu. de mvt. : $m_1 \vec{v}_{1i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f} = (m_1 + m_2) \vec{v}_f$

$$E_{c,f} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_f^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{m_1 + m_2} (m_1 + m_2)^2 v_f^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{m_1 + m_2} (m_1 v_{1i})^2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} E_{c,i}$$

La différence d'énergie cinétique → déformations, énergie thermique

- collisions parfaitement élastiques (par définition : pas de dissipation d'énergie)

points matériels sans structure => pas de rotation, pas d' « effet », choc « frontal » : les 2 part. se meuvent après le choc sur la même droite

Pour simplifier, on prend $v_{2i} = 0$ et on suppose que la particule 1 reste dans la même direction

conserv. qu. de mvt. $m_1 \vec{v}_{1i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f} \Rightarrow m_1(\vec{v}_{1i} - \vec{v}_{1f}) = m_2 \vec{v}_{2f} \quad (1)$

conserv. de l'énergie $\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \Rightarrow m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2 v_{2f}^2 \quad (2)$

(2) : (1) $\vec{v}_{1i} + \vec{v}_{1f} = \vec{v}_{2f}$

on porte dans (1) $(m_1 - m_2) \vec{v}_{1i} = (m_1 + m_2) \vec{v}_{1f}$

$$\Rightarrow \vec{v}_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_{1i} \quad \vec{v}_{2f} = \vec{v}_{1i} + \vec{v}_{1f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_{1i}$$

Remarque : souvent utile de faire les calculs dans le référentiel « du centre de masse », où le centre de masse du système de particules en collision est au repos → la somme des impulsions est nulle à tout moment

VII. Mécanique des fluides

1. Statique

pression; principe de Pascal

poussée d'Archimède

forces de surface; gouttes : forme, pression interne; mouillage

2. Dynamique

écoulements; équation de continuité

équation de Bernoulli; théorème de Torricelli; effet Venturi

écoulement visqueux; loi de Poiseuille

1. Statique

Fluides parfaits

incompressibles, non visqueux \rightarrow modules de Young et de cisaillement = 0

Pression

un fluide au repos exerce sur toute surface S une force normale $F = p S$; la pression est un *champ scalaire*

pression hydrostatique : $P = \rho g h$

pression manométrique : $P_m = P - P_{atm}$; $\Delta P_m = \Delta P$

Principe de Pascal

Toute pression externe exercée sur un fluide incompressible confiné dans un récipient se transmet intégralement dans tout le fluide

Poussée d'Archimède

Dans le champ de gravitation, un corps plongé dans un fluide subit une poussée vers le haut égale au poids du fluide déplacé

Densité

$$\delta = \rho / \rho_{\text{eau}}$$

Forces de surface

Énergie potentielle de surface

Force pour sortir un fil métallique de longueur L plongé dans un fluide :

$$F_t = 2 \gamma L \quad (2 \text{ car double film})$$

ou : travail pour créer la (double) couche de largeur h

$$\Delta W_t = 2 \gamma L h \quad [\gamma] = \text{J} / \text{m}^2 = \text{N} / \text{m}$$

γ dépend des matériaux en contact (liquide – gaz, liquide – solide, solide – gaz), et de la température; importance des impuretés.

Forme des gouttes

- dans le vide : $E_{pot surf} = \gamma_{liq.-vide} S$ est minimale à volume constant \rightarrow sphère
- sur une surface solide, dans l'air, et dans le champ de la gravitation (h = hauteur de chaque petite fraction de la goutte par rapport au support)

$$E_{pot} = E_{pot grav} + E_{pot surf} = m g h + \gamma_{l-g} S_{l-g} + \gamma_{l-s} S_{l-s} + \gamma_{s-g} S_{s-g}$$

doit être minimale à V constant

Or, pour un changement d'échelle λ (toutes les dimensions multipliées par λ)

$\gamma; g$	mult. par	1	h	mult. par	λ
S		λ^2	$V; m$		λ^3

$$\rightarrow E_{pot grav} = m g h \text{ mult. par } \lambda^4 \quad E_{pot surf} = \gamma S \text{ mult. par } \lambda^2$$

$$\rightarrow E_{pot grav} / E_{pot surf} \quad \lambda^2$$

\rightarrow pour plus grand h , gouttes plus plates; petites gouttes sont plus sphériques.

Gouttes : saut de pression entre intérieur et extérieur

Goutte sphérique dans un fluide, pression intérieure p , pression du fluide extérieur p_0

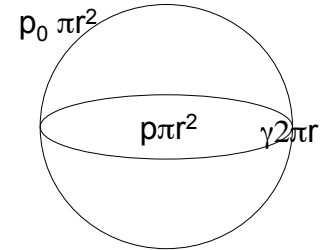
Une surpression doit régner dans la goutte pour compenser la tension superficielle

Forces verticales s'exerçant sur l'hémisphère supérieure :

- force de pression exercée par le fluide extérieur = $p_0 \pi r^2$
(pression sur surface convexe = pression sur surface plane)
- force de surface le long de la circonférence = $\gamma 2 \pi r$
- force de pression exercée par le fluide contenu dans l'autre hémisphère = $p \pi r^2$

$$\rightarrow p_0 \pi r^2 + \gamma 2 \pi r = p \pi r^2$$

$$\text{surpression } (p - p_0) = 2 \gamma / r$$



Mouillage

A l'équilibre, les forces exercées sur la droite D se compensent

$$F_{l-s} + F_{l-g} \cos \alpha = F_{g-s} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\gamma_{g-s} - \gamma_{l-s}}{\gamma_{l-g}}$$

$\alpha < \pi/2 \Leftrightarrow \gamma_{g-s} > \gamma_{l-s} + \gamma_{l-g}$: liquide "mouille", monte le long de la paroi

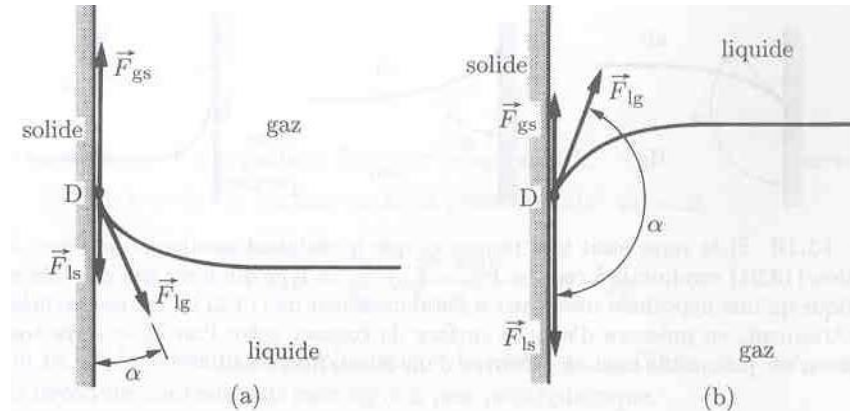
angle de raccordement :

eau - verre - air $\alpha = 0$

eau - acier - air $\alpha = 90^\circ$

eau - parafine - air $\alpha = 107^\circ$

verre - mercure - air $\alpha = 140^\circ$



source: Rothen

2. Dynamique

Le champ des vitesses définit les *lignes de courant*

- écoulement laminaire

champ de vitesses stationnaire

trajectoire des particules ne se coupent pas; lignes de courant ne se coupent pas

- écoulement turbulent

irrégulier et variable; formation de tourbillons

Frottements fluides

couche de fluide en contact avec les parois est immobile → gradient de vitesse en s'écartant des parois

écoulement laminaire : force de frottement $\propto v$

écoulement turbulent : force de frottement $\propto v^2$ puissance dissipée $P \propto v^3$

Équation de continuité

(fluide parfait, de masse volumique ρ , écoulement laminaire)

Aux extrémités d'un tube de courant : $\Delta V / \Delta t = c^{te}$ (où $V = \text{volume}$) $\Rightarrow S_1 v_1 = S_2 v_2$

Débit volumique : $J = \Delta V / \Delta t = S v$ dimensions : $m^3 s^{-1}$

Équation de Bernouilli

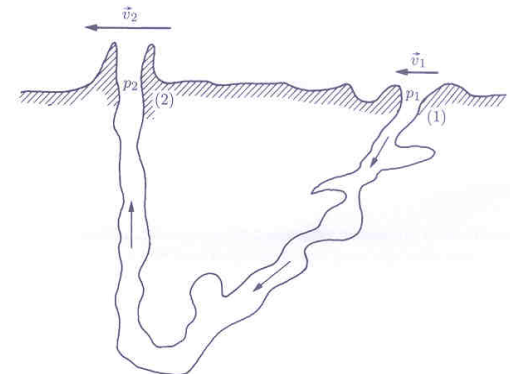
Pour fluide incompressible, non visqueux, en écoulement laminaire

Travail pour faire avancer un élément de tube de courant

(déplacé de Δs_1 à gauche, de Δs_2 à droite)

$$\begin{aligned}\Delta W &= F_1 \Delta s_1 - F_2 \Delta s_2 = P_1 S_1 \Delta s_1 - P_2 S_2 \Delta s_2 = S v \Delta t (P_1 - P_2) && (\text{car } S_1 v_1 = S_2 v_2 = S v) \\ &= \Delta E_c + \Delta E_{pot\ grav} = \frac{1}{2} \Delta m (v_2^2 - v_1^2) + \Delta m g (y_2 - y_1)\end{aligned}$$

→ équation de Bernouilli : $P + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g y = c^{te}$



Théorème de Torricelli

Vitesse d'écoulement d'une cuve avec extrémité à l'air libre :

$$v_2^2 = v_1^2 + \frac{2(P - P_{atm})}{\rho} + 2 g h \quad \Rightarrow \quad \text{si } S_1 \gg S_2 \quad v_2 \gg v_1 \quad \text{et si } P = P_{atm} \quad \rightarrow \quad v_2 = \sqrt{2 g h}$$

Aération du terrier du chien de prairie
(Rothen, fig. 14.14)

Effet Venturi

Écoulement horizontal :

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad \Rightarrow \quad P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 \left(1 - \frac{S_2^2}{S_1^2} \right)$$

→ $S_1 > S_2 \Rightarrow P_1 > P_2$ étranglement → augmentation de vitesse et chute de pression

Attraction par vide partiel (Clément et Desormes)

Deux plateaux circulaires horizontaux séparés de Δh , entre lesquels s'écoule un fluide arrivant par un trou central dans l'un des plateaux

Equation de continuité : $v 2\pi r \Delta h = Cte \rightarrow v \downarrow$ quand $r \uparrow$.

Or Bernouilli : $P + \frac{1}{2} \rho v^2 = Cte$

$\rightarrow P \uparrow$ quand $r \uparrow$, avec $P_{\max} = P_{atm}$

\rightarrow dépression ("vide partiel") au centre, attraction entre les plateaux

Ex. : bille d'acier reste suspendue à 0,1 mm d'une tuyère conique dont sort un fluide à haute pression

Écoulement visqueux

Force à appliquer pour vaincre les frottements visqueux et déplacer à vitesse v_x constante une plaque d'aire S à la surface d'un fluide de viscosité η , la paroi étant à la profondeur y :

$$F = \eta S \frac{v_x}{y} \quad \rightarrow \quad \text{contrainte de cisaillement } \sigma_s = \eta \frac{dv_x}{dy} \quad (\text{déf. des fluides "newtoniens"})$$

Loi de Poiseuille

Pour un cylindre de fluide de rayon r , de surface extérieure $S = 2 \pi r L$, avec $v_x = 0$ pour $r = R$, la force de viscosité est contrebalancée par la différence de pression entre les extrémités du tube :

$$F = -\eta (2 \pi r L) \frac{dv_x}{dr} = \Delta P \pi r^2 \quad \Rightarrow \quad v_x = \frac{\Delta P}{4 \eta L} (R^2 - r^2) = \text{parabole}$$

$$\text{Débit volumique : } dJ = v_x dS = v_x 2 \pi r dr \quad \Rightarrow \quad J = \frac{\pi R^4}{8 \eta} \frac{\Delta P}{L}$$

\rightarrow augmente avec le gradient de pression $\frac{\Delta P}{L}$ et avec R , diminue avec η

L'ultracentrifugeuse

But : mesurer taille et masse des particules en suspension dans un liquide (ex. protéines), par l'étude de la sédimentation à l'équilibre, ou de la vitesse de sédimentation, compte tenu de l'existence de plusieurs processus à l'oeuvre :

- chute dans le champ de la pesanteur
- poussée d'Archimède
- effets de la viscosité
- effets de diffusion (mouvement brownien)

Chute stationnaire dans un fluide visqueux : $F_g = (\rho_{part} - \rho_{fl})Vg = F_f = f_0 v$

Stokes : pour une particule sphérique de rayon r , coeff. de frottement $f_0 = 6\pi\eta r$

$$\rightarrow \frac{4}{3}\pi r^3 (\rho_{part} - \rho_{fl})g = 6\pi\eta r v \quad \rightarrow v \propto r^2$$

Utilisation d'un champ centrifuge (plus de 100 000 tours / minute):

$$\text{chute stationnaire} \quad v \propto F \propto a \rightarrow \frac{v'}{v} = \frac{\omega^2 r}{g}$$

→ grande augmentation de la vitesse de sédimentation !

Pour éviter instabilités mécaniques et fatigue de l'axe :

soutien du rotor par vide partiel

(« toupies d'Henriot »)

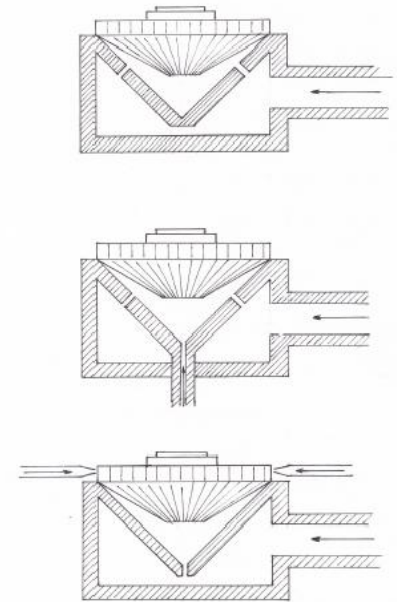


FIG. 4.3 – Les trois modèles de "toupies" d'Henriot : dans le premier dispositif, l'air de sustentation est également celui d'entraînement ; dans le second dispositif, la rotation de la toupie aspire de l'air par le conduit vertical à pression ambiante ; dans le troisième dispositif les fonctions d'entraînement et de sustentation sont prises en charge par deux conduits amenant de l'air pressurisé.

source J.-R. Dierickx

VIII. Élasticité, oscillations et ondes

1. Élasticité

phénoménologie; contraintes; modules

2. Systèmes oscillants

mouvement sinusoïdal

ressort, pendule

amortissement; résonance

3. Ondes

ondes sinusoïdales

ondes transversales : corde vibrante; vitesse de déplacement, transmission

ondes de compression (son); vitesse du son

ondes stationnaires; réflexion, réfraction, diffraction; effet Doppler;
battements

superposition des ondes; analyse de Fourier

1. Élasticité

Déformation des solides : région élastique / région plastique / rupture

Région élastique : loi de Hooke

Allongement proportionnel à la force qui l'a provoqué (approximation linéaire)

$$k \vec{s} = \vec{F}_{ext} \quad k \text{ en N m}^{-1}$$

3^{ème} loi de Newton : **force de rappel** (signe -) proportionnelle à l'écart s par rapport à la position d'équilibre, avec la même constante k

$$\vec{F} = -k \vec{s}$$

Dans le domaine linéaire, force de rappel est *conservative* (on peut récupérer le travail effectué - pas vrai dans le domaine plastique) → **énergie potentielle**

$$E_P = \frac{1}{2} k s^2 \quad (\text{puisque } W = -\int -\vec{F} \cdot d\vec{s} = \int k s ds)$$

Contraintes, déformations, modules

Contrainte (traction, compression ou cisaillement) : force élastique par unité de surface

$$\sigma = F / S \quad \sigma \text{ en } N / m^2 = Pa \quad (\text{comme pression})$$

Déformations et modules

Traction : déformation $\varepsilon = \Delta L / L_0$ (sans dimension)

module de Young $E = \sigma / \varepsilon = \frac{F}{S} \frac{1}{\Delta L / L_0} \Leftrightarrow F = E S \Delta L / L_0 = k \Delta L$

Compression : déformation $\varepsilon = \Delta V / V_0$

$$B = -\frac{F}{S} \frac{1}{\Delta V / V_0} \quad (\Delta V \text{ a signe opposé à celui de } F)$$

Cisaillement : déformation $\varepsilon_s = \gamma ; \tan \gamma = \Delta L / L_0$

$$G = \sigma_s / \varepsilon_s = \frac{F}{S} \frac{1}{\gamma} \Leftrightarrow F = G S \Delta L / L_0 = k \Delta L$$

2. Mouvement sinusoïdal; oscillateur harmonique

$x = A \cos(\omega t + \phi)$ $A = \text{élongation}$, $\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu = \text{pulsation}$, $\phi = \text{phase}$

$v_x = -A\omega \sin(\omega t + \phi) = A\omega \cos(\omega t + \phi + \pi/2)$: déphasage de $\pi/2$

$a_x = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 x$

⇒ équation différentielle du mouvement sinusoïdal : $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$

C'est l'équation de l'oscillateur harmonique :

$F = ma = -kx$: force de rappel proportionnelle à l'écartement avec $\omega = \sqrt{k/m}$

⇒ solution

$x = A \cos(\omega t + \phi) = B \cos \omega t + C \sin \omega t$

2 constantes d'intégration : A et ϕ , ou B et C

- ressort :

(on prend $x = A$ pour $t = 0$, c.-à-d. $\phi = 0$)

conservation de l'énergie : $E = 1/2 mv^2 + 1/2 kx^2 = 1/2 mv_{\max}^2 = 1/2 kA^2$

$$\Rightarrow v_{\max} = A\sqrt{k/m}$$

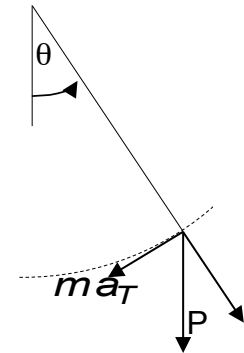
- pendule (petites oscillations, $\theta \ll 1$) :

$ma_T = -mg \sin \theta \approx -mg \theta \approx -mg \frac{l}{L}$ où $l = \theta L =$ longueur de l'arc

$$\Rightarrow \frac{d^2 l}{dt^2} + \frac{g}{L} l = 0$$

$$\Rightarrow l = l_0 \cos \omega t \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{g/L}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{L/g} \quad \text{ indép. de } \theta \quad ; \quad \text{ mesure de } g$$



- balance de torsion

Amortissement

Supposons une force d'amortissement proportionnelle à la vitesse $F = -b v$
(cf. frottements fluides à faible vitesse)

$$ma = -kx - bv \quad \Leftrightarrow \quad m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (1)$$

Solution $x = A e^{-\alpha t} \cos \omega' t \rightarrow$

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha A e^{-\alpha t} \cos \omega' t - \omega' A e^{-\alpha t} \sin \omega' t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = (\alpha^2 - \omega'^2) A e^{-\alpha t} \cos \omega' t + 2\alpha\omega' A e^{-\alpha t} \sin \omega' t$$

$$(1) \rightarrow A e^{-\alpha t} \left[(m\alpha^2 - m\omega'^2 - b\alpha + k) \cos \omega' t + (2\alpha\omega' m - b\omega') \sin \omega' t \right] = 0$$

Membre de gauche doit être nul pour tout t

\rightarrow en particulier pour $t = 0$ et $t = \pi/2 \quad \Rightarrow \quad \alpha = b/2m, \quad \omega' = \sqrt{k/m - b^2/4m^2}$

$b^2 < 4mk$: mouvement oscillatoire amorti

$b^2 = 4mk$: amortissement exponentiel

$b^2 > 4mk$: amortissement sous-critique (pas d'oscillation)

Oscillations forcées - résonances

Amortissement + force périodique $F_0 \cos \omega t$ (cf. balançoire)

$$ma = -kx - bv + F_0 \cos \omega t \quad \Leftrightarrow \quad m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega t \quad (1)$$

(En supposant l'amortissement faible,) on vérifie que

$x = A_0 \sin(\omega t + \phi_0)$ est solution de (1), avec

$$A_0 = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 b^2 / m^2}} \quad \text{où} \quad \omega_0 = \sqrt{k / m}$$

$$\phi_0 = \text{arctg} \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega b / m}$$

"*Résonance*" si $\omega \cong \omega_0$, c.-à-d. si la fréquence de la force extérieure est l'une des fréquences propres du système; en l'absence d'amortissement ($b = 0$) : alors $A_0 \rightarrow \infty$

3. Ondes

Onde mécanique: perturbation qui se propage de proche en proche dans un milieu qui réagit

Transport d'énergie sans transport de matière (contrairement aux particules)

- ondes transversales (corde vibrante, ondes électromagnétiques, surface d'un liquide)
- ondes longitudinales (ondes de pression : son, intérieur d'un fluide non visqueux)

NB. : - *forme* de l'onde déterminée par le mouvement de l'émetteur :

simple impulsion, train d'ondes, onde entretenue

(*train d'ondes* : « onde porteuse » modulée dans le temps)

- *vitesse* de propagation déterminée par les propriétés physiques du milieu

Ondes sinusoïdales

- longueur d'onde λ = distance entre deux points (voisins) de même élongation (en un instant donné)
- période T (inverse de la fréquence ν) : temps pour retrouver la même élongation au même endroit
- vitesse de l'onde $v = \lambda / T$ = vitesse à laquelle se déplace un point d'élongation donnée – pas le déplacement de la matière !

Si, pour $t = 0$, l'élongation est donnée par $\Psi(x, 0) = A \sin \frac{2\pi x}{\lambda}$, au temps t , l'élongation sera la même

$$\text{qu'en } t = 0 \text{ au point } x - vt \quad \rightarrow \Psi(x, t) = A \sin \frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)$$

$$\Rightarrow \text{équation des ondes : } \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

$$\text{en général : } \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \Delta^2 \Psi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

Ondes transversales

Vitesse de propagation de l'onde : dépend

- de l'inertie et l'élasticité du milieu
- de l'accélération des particules du milieu et de la manière dont il résiste

Corde vibrante, de tension F_T et de masse linéique $\mu = \Delta m / \Delta l$: $v = \sqrt{F_T / \mu}$

Réflexion de l'impulsion à l'extrémité de la corde :

renversement (déphasage de 180°) ou non selon que l'extrémité est fixe (càd réagit) ou est libre

Absorption :

dissipation d'une partie de l'énergie de l'onde \rightarrow amortissement

Transmission :

longueur d'onde change quand la masse linéique change (puisque la vitesse de propagation change)

Polarisation :

caractérise la direction du mouvement d'oscillation des particules du milieu (polarisation plane ou circulaire).

Ondes longitudinales

Ondes de compression = ondes acoustiques

Les seules ondes dans les fluides non visqueux (pas de réponse au cisaillement)

Variation de pression en avance de phase de $\pi/2$ par rapport au déplacement des particules

Vitesse du son :

Milieu de masse volumique ρ et de module de compressibilité B : $v = \sqrt{B / \rho}$

Vitesse dépend de la température et de la pression :

$B = \frac{-\Delta P}{\Delta V / V}$; propagation du son est adiabatique, avec $PV^\gamma = \text{cte}$, $\gamma ; 1,4$

$\Rightarrow v = \sqrt{1,4 P / \rho}$ NB. : ne dépend pas de v

Front d'onde

ensemble des points qui vibrent en phase; à grande distance, onde sphérique \rightarrow onde plane

Intensité sonore :

intensité $I = P_m / S$; diminue comme $1 /$ surface du front d'onde $\sim 1 / R^2$

variation d'intensité : $\beta = 10 \log_{10} (I / I_0)$, mesurée en dB (sans dim.)

Hauteur d'un son :

sa fréquence

Effet Doppler

Source et / ou milieu en mouvement par rapport au récepteur

- la propagation ne dépend que du milieu, est indépendante de la vitesse de la source
- le mouvement de la source par rapport au milieu modifie la distance entre les fronts d'onde

On suppose le milieu au repos; la longueur d'onde λ est la vitesse de la source par rapport au milieu est v_S , celle de l'observateur est v_O ; la fréquence d'émission de la source est f_S

$$\text{Dans le milieu : } \lambda = \frac{\text{distance parcourue par l'onde en un temps } t}{\text{nombre d'ondes émises en un temps } t} = \frac{(v + v_S) t}{f_S t}$$

$$\text{Pour l'observateur, vitesse de l'onde} = v + v_O \Rightarrow f_O = \frac{v + v_O}{\lambda} = \frac{v + v_O}{v + v_S} f_S$$

$$\Rightarrow \frac{f_O}{f_S} = \frac{v + v_O}{v + v_S}$$

NB. v_O et v_S ont un signe : s'ajoutent ou se soustraient à v

Superposition des ondes

Le déplacement d'un point matériel sous l'effet conjugué de deux ondes = somme des déplacements sous l'effet de chacune des ondes : combinaison linéaire (car pour oscillateur harmonique déplacement proportionnel à la force, et les forces s'ajoutent linéairement)

→ phénomènes d'interférence

➤ Superposition d'ondes de même fréquence → onde de même fréquence :

$$\begin{aligned}\Psi(t) &= \Psi_1(t) + \Psi_2(t) = a \sin(\omega t + \phi_1) + b \sin(\omega t + \phi_2) \\ &= (a \cos \phi_1 + b \cos \phi_2) \sin \omega t + (a \sin \phi_1 + b \sin \phi_2) \cos \omega t = A \sin \omega t + B \cos \omega t = C \sin(\omega t + \phi_3)\end{aligned}$$

➤ Superposition de deux ondes de fréquences différentes :

$$\Psi_1 = A_1 \sin \omega_1 t \quad \Psi_2 = A_2 \sin \omega_2 t \quad (\text{pour simplifier, on prend } A_1 = A_2 = A \text{ et } \phi_1 = \phi_2 = 0)$$

$$\rightarrow \Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = 2A \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t$$

Si les fréquences sont proches → "*battement*" :

- onde porteuse de fréquence $\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}$

- modulation de l'amplitude, de fréquence $\frac{\nu_1 - \nu_2}{2}$

Interférence entre deux sources ponctuelles

Interférence de deux ondes progressives émises en phase aux sources

$$\psi_1(r_1, t) = a \sin ((2\pi/\lambda) (r_1 - vt)) = a \sin (kr_1 - \omega t)$$

$$\psi_2(r_2, t) = b \sin (kr_2 - \omega t)$$

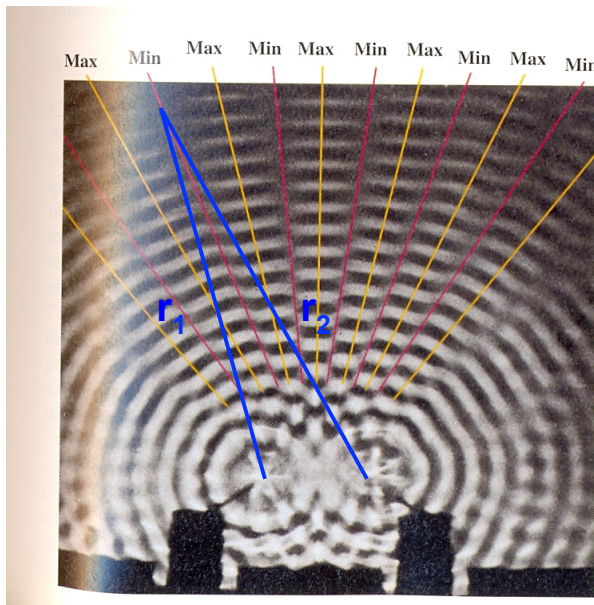
k « nombre d'onde » = $2\pi/\lambda$, r_i distance entre la source i et l'observateur

Amplitude de $\psi_1 + \psi_2$ dépend du déphasage entre les deux = $k(r_1 - r_2)$

En phase : $k(r_1 - r_2) = m \cdot 2\pi \Leftrightarrow (r_1 - r_2) = m \cdot \lambda \Rightarrow$ maximum d'interférence

En opposition de phase : $k(r_1 - r_2) = (m + 1/2) \cdot 2\pi \Leftrightarrow (r_1 - r_2) = (m + 1/2) \cdot \lambda$

\Rightarrow minimum



Succession de minima et maxima correspondant à des différences de distances multiples entiers (max.) ou demi-entiers (min.) de λ

Vagues produites par deux sources ponctuelles dans une cuve à ondes - source : Hecht

Analyse de Fourier

Toute fonction périodique de fréquence ν (de forme arbitrairement complexe) peut être représentée comme la superposition d'ondes sinusoïdales, de fréquences multiples de ν :

$$\begin{aligned}\Psi(t) &= A_0 + A_1 \cos(\omega t + \phi_1) + A_2 \cos(2\omega t + \phi_2) + A_3 \cos(3\omega t + \phi_3) + \dots \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t + \phi_k) = B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin k\omega t\end{aligned}$$

→ « analyse spectrale » de la fonction, la décomposant en sa **série de Fourier** :

- détermination de l'amplitude correspondant à chacune des harmoniques,
- réalisée expérimentalement à l'aide d'un spectrographe de Fourier

Les amplitudes et les phases sont obtenues par intégration (analytique, numérique ou analogique) de la fonction analysée (mathématiquement, elle doit être raisonnablement régulière, ce qui est le cas pour les processus physiques) :

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi(z) \cos kz \, dz \qquad C_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi(z) \sin kz \, dz$$

Une simple impulsion peut également être décomposée en une somme (infinie) de fonctions sinusoïdales dont la fréquence varie de manière continue dans une certaine bande.

Ondes stationnaires

Ondes stationnaires

Interférence d'une onde, qui se propage dans un milieu limité, avec elle-même réfléchi un grand nombre de fois sur les extrémités du milieu

Amplification et résonance pour des fréquences caractéristiques :
« harmoniques »

$$\text{Condition aux limites : } L = \frac{1}{2}n \frac{v}{\nu_n} \quad \text{avec } v = \sqrt{F_T / \mu} \quad \Rightarrow \quad \nu_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} = n \nu_1 \quad \text{harmoniques}$$

Ondes stat. peuvent être transverses (corde vibrante) ou longitudinales (tuyau d'orgue) :

- pas de déplacement du profil de l'onde
 - pas de mouvement de la matière aux « nœuds » – mouvement maximal aux « ventres »
- noeuds aux extrémités fixes, ventres aux extrémités libres

Timbre d'un instrument provient de la combinaison spécifique des harmoniques

Réfraction

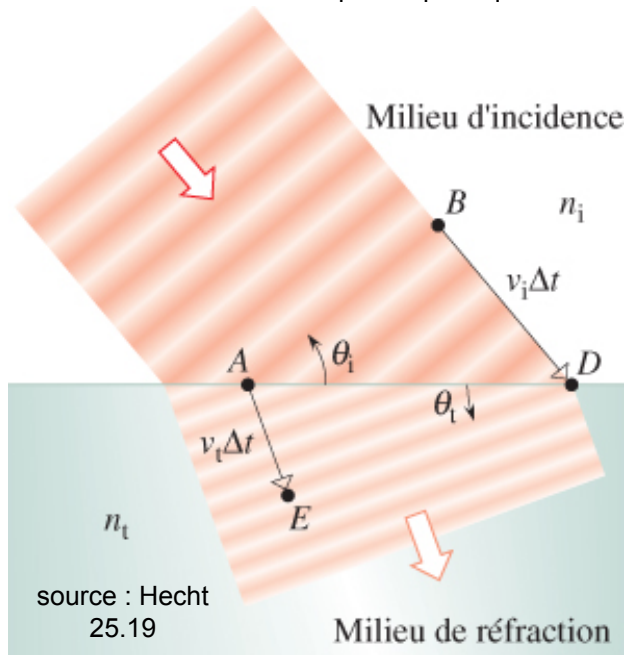
Changement de direction d'un front d'onde passant d'un milieu à un autre, où les vitesses de propagation sont différentes

ex.: ondes sonores : effets du gradient de température, de la vitesse du vent;
ondes sismiques longitudinales à la séparation manteau – noyau

Cas de la transition entre 2 milieux séparés par une interface plane

Onde incidente : fait vibrer les points matériels de l'interface à même fréquence \Rightarrow chaque point produit une onde sphérique \Rightarrow interférence constructive dans la direction de propagation de l'onde transmise

Milieu d'incidence : $v_i \Rightarrow \lambda_i = v_i \cdot T$; milieu de réfraction : $v_t \Rightarrow \lambda_t = v_t \cdot T$



Progression du front d'onde AB pendant un temps Δt :

$AE = v_t \cdot \Delta t = AD \sin \theta_t$ dans le milieu de réfraction

$BD = v_i \cdot \Delta t = AD \sin \theta_i$ dans le milieu d'incidence

\Rightarrow loi de Snell-Descartes :

$$\sin \theta_t \cdot 1/v_t = \sin \theta_i \cdot 1/v_i$$

Diffraction

Les particules situées sur la surface d'un obstacle (resp. les particules du milieu qui occupe l'ouverture de l'écran) agissent comme des centres d'émission

Si les dimensions L de l'obstacle (resp. de l'ouverture dans l'écran) sont petites par rapport à la longueur d'onde λ :

- émission cohérente d'une onde sphérique
- fraction de l'énergie réfléchie par l'obstacle (resp. transmise par l'ouverture) petite
- l'onde « contourne » l'obstacle (resp. est diffusée par les particules de l'ouverture dans l'écran)

Si $L \gg \lambda$: onde plane réfléchie (resp. transmise); fraction réfléchie (resp. transmise) grande

Réflexion et diffraction sont des phénomènes complémentaires pour le rapport λ / L

IX. La lumière

1. Comportement ondulatoire
2. Réflexion et réfraction

1. Comportement ondulatoire

Se propage aussi dans le vide - vitesse : $c = 3 \cdot 10^8$ m/s dans le vide

Oscillation d'une force à longue portée : force électrique \Rightarrow onde électromagnétique (E.M.) \Rightarrow fait vibrer les charges électriques de la matière : les électrons des atomes deviennent sources d'ondes E.M. sphériques.

Onde transverse: seule la composante de l'oscillation \perp à la direction de propagation est perceptible à grande distance

Lumière visible

Rouge : $\lambda \sim 780$ nm ; $f = c/\lambda = 385 \cdot 10^{12}$ Hz

Violet : $\lambda \sim 390$ nm ; $f = c/\lambda = 770 \cdot 10^{12}$ Hz

Onde radio FM : 100 MHz; $\lambda \sim 3$ m

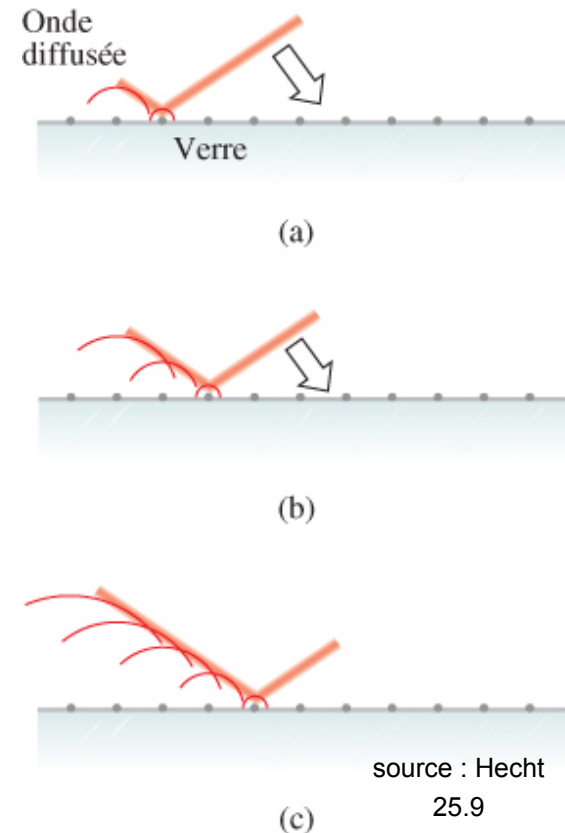
Rayons X : $\lambda \sim 10^{-10}$ m

Distance interatomique $\sim 10^{-2} - 10^{-3} \times \lambda_{\text{vis}}$:

Chaque atome produit une onde sphérique

Interférence constructive vers l'avant

Direction de propagation de l'énergie lumineuse = rayon lumineux, \perp au front d'onde



2. Réflexion et réfraction de la lumière

A l'interface, une partie de l'énergie de l'onde incidente (i) est réfléchi (r) et une partie est transmise ou réfractée (t).

Lois de la réflexion :

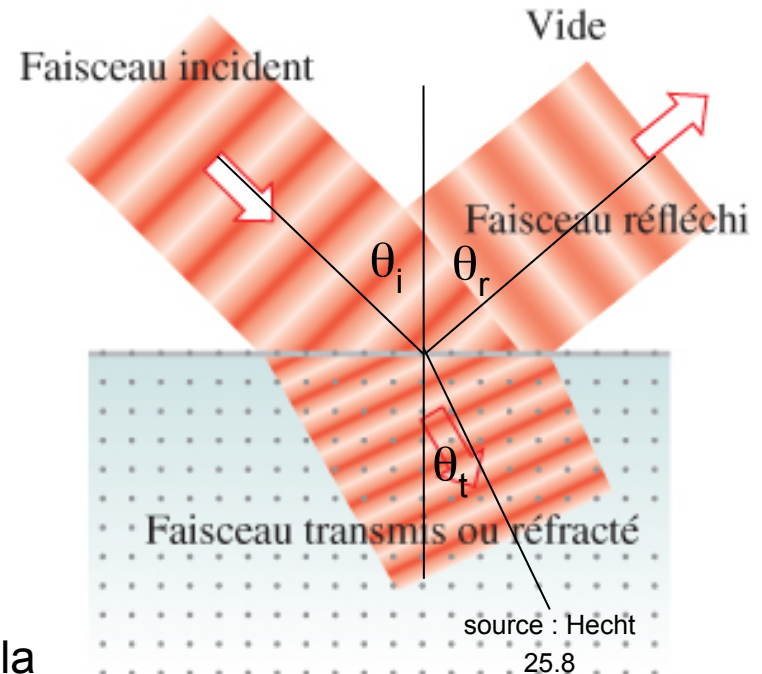
- 1) $\theta_r = \theta_i$
- 2) rayon incident, normale à l'interface et rayon réfléchi dans le même plan = plan d'incidence

Dans un milieu, vitesse de propagation de la lumière $v < c \Rightarrow \lambda = vT \downarrow$

Indice de réfraction $\eta = c/v \Rightarrow \eta_i \cdot \lambda_i = \eta_t \cdot \lambda_t$

Lois de la réfraction :

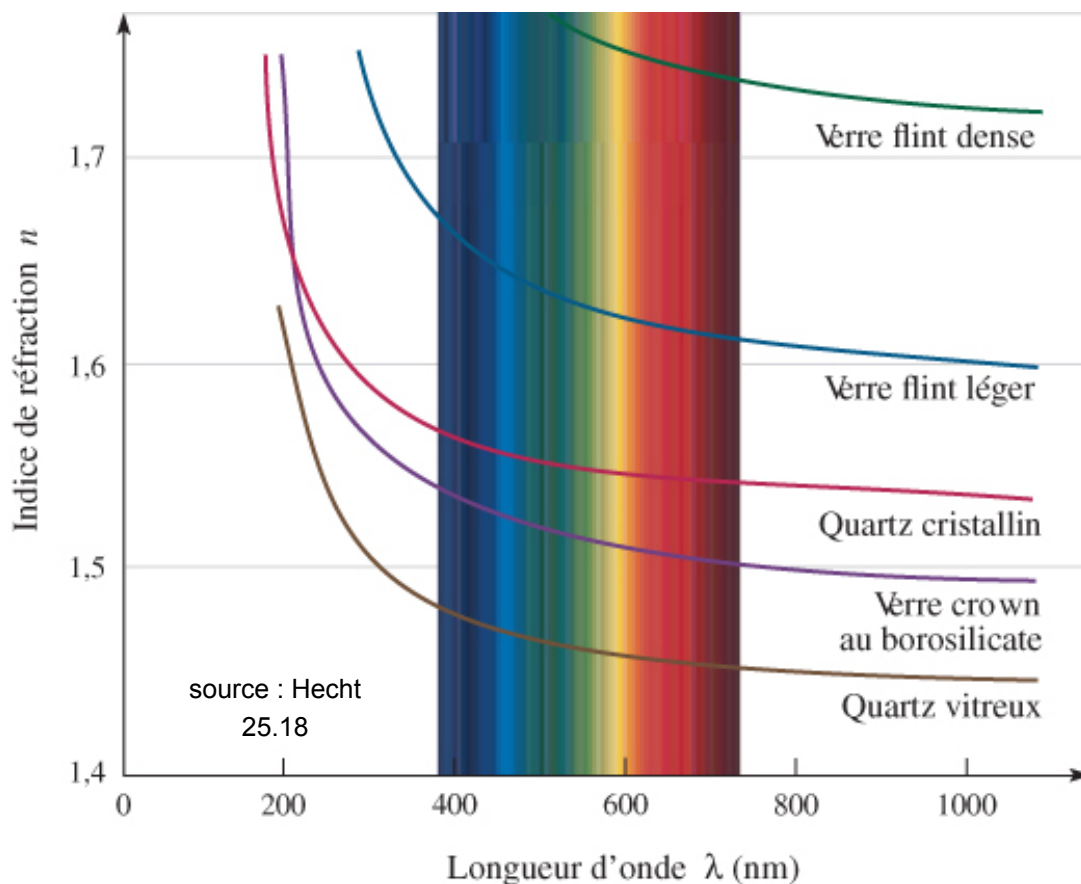
- 1) Snell-Descartes : $\eta_i \cdot \sin \theta_i = \eta_t \cdot \sin \theta_t$
- 2) rayon incident et rayon transmis dans le plan d'incidence



Angle limite – réflexion totale
 Si $\eta_i > \eta_t$: pas d'onde transmise
 pour $\sin \theta_i \geq \eta_t / \eta_i$

Application : fibres optiques

Indice de réfraction



Dépend de λ

Résonance dans l'U.V.
(correspond à l'énergie de liaison des électrons périphériques)

Diffusion accrue du bleu \Rightarrow
bleu du ciel, couleur du soleil couchant

Ex.: décomposition de la lumière par un prisme, risme, arc-en-ciel, aberrations chromatiques des lentilles...

X. Optique géométrique

1. Chemin optique
2. Lentilles minces
3. L'oeil
4. Instruments
 1. La loupe
 2. Le microscope

1. Chemin optique

Optique géométrique :

- Etude de la propagation de la lumière dans un (ou une succession de) milieu(x) homogène(s) $\Rightarrow \eta$ constant(s) \Rightarrow propagation en ligne droite dans chaque milieu ; représentation par rayons lumineux
- Effets de diffraction négligés

Appareil optique (interface, lentille...) : intercepte et transmet une partie de l'énergie lumineuse émise par la source

L'image d'une source lumineuse ponctuelle se forme là où les fronts d'onde transmis interfèrent constructivement \Rightarrow là où ils arrivent en phase

Dans le vide : distance de propagation $x \rightarrow$ déphasage $k \cdot x = 2\pi \cdot x / \lambda_{\text{vide}}$

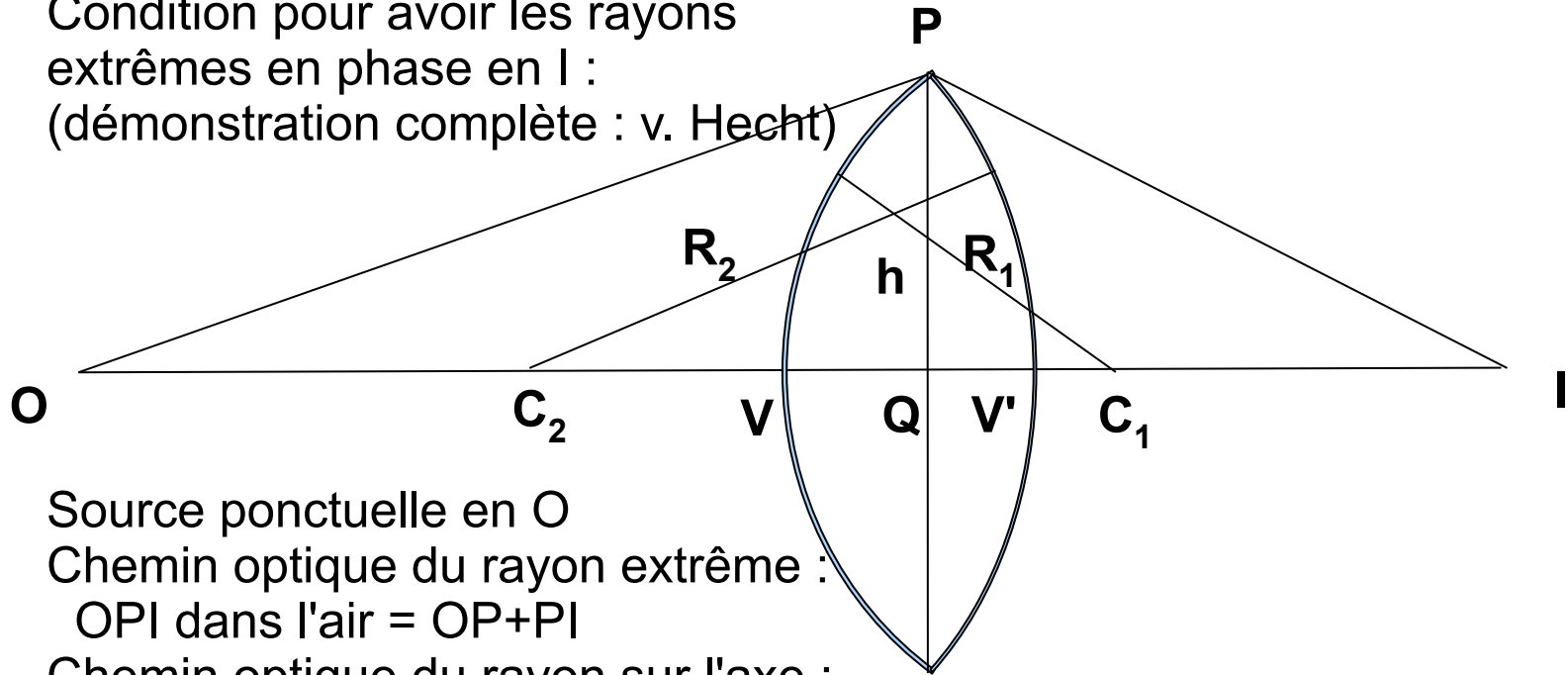
Dans la matière : distance $x \rightarrow$ déphasage $2\pi \cdot x / \lambda_{\text{matière}} = 2\pi \eta \cdot x / \lambda_{\text{vide}}$

Chemin optique : distance de propagation dans le vide qui causerait le même déphasage que la propagation dans le milieu $= \eta \cdot x$

2. Lentilles sphériques minces

Définitions et approximations : faces sphériques ; axe = axe optique ; rayons presque // à l'axe (paraxiaux)

Condition pour avoir les rayons extrêmes en phase en I :
(démonstration complète : v. Hecht)



Source ponctuelle en O

Chemin optique du rayon extrême :

$$OPI \text{ dans l'air} = OP + PI$$

Chemin optique du rayon sur l'axe :

$$OV + \eta \cdot VQ + \eta \cdot QV' + V'I$$

$$= OQ + (\eta - 1) \cdot VQ + QI + (\eta - 1) \cdot QV'$$

Arrivent en phase au point image I si :

$$OP + PI = OQ + (\eta - 1) \cdot VQ + QI + (\eta - 1) \cdot QV'$$

$$\text{Soit si } (OP - OQ) + (PI - QI) = (\eta - 1) \cdot VQ + (\eta - 1) \cdot QV' \text{ (eqn. 1)}$$

Equation des lunetiers

Triangle OPQ : $\delta = (OP-OQ)$; $OP^2 = (OQ+\delta)^2 = OQ^2 + h^2$

$OQ^2 + 2.OQ.\delta + \delta^2 = OQ^2 + h^2$ (eqn. 2)

Rayons paraxiaux : OP presque // OQ $\rightarrow \delta$ petit $\rightarrow \delta^2$ négligeable ;
l'équation (eqn. 2) se réduit à : $\delta \approx h^2/2.OQ$

Triangle PQI : $\rho = (PI-QI)$; calcul semblable $\rightarrow \rho \approx h^2/2.QI$

Cercle 1 : Triangle PQC₁ : $QC_1 = R_1 - VQ$; $R_1^2 = (R_1 - VQ)^2 + h^2$

Lentilles minces : VQ petit $\rightarrow VQ^2$ négligeable ; $VQ \approx h^2/2.R_1$

Cercle 2 : Triangle PQC₂ : calcul semblable $\rightarrow QV' \approx h^2/2.R_2$

L'équation (eqn.1) devient : $1/OQ + 1/QI = (\eta-1).[1/R_1+1/R_2]$

Equation des lunetiers : $1/s_o + 1/s_i = (\eta-1).[1/R_1-1/R_2]$

Valable pour toutes les configurations avec les conventions de signe suivantes :

$OQ = s_o =$ distance objet ; >0 si à gauche de la lentille

$QI = s_i =$ distance image ; >0 si à droite de la lentille, <0 si à gauche

Rayons des faces : >0 si centre de courbure à droite de la lentille

Distance focale ; équation de conjugaison

Foyer image (resp. foyer objet) : point où convergent des rayons incidents parallèles (resp. d'où proviennent des rayons qui émergent parallèles)

f = distance focale

$$1/f = (\eta - 1) \cdot [1/R_1 - 1/R_2]$$

Equation de conjugaison : $1/s_o + 1/s_i = 1/f$

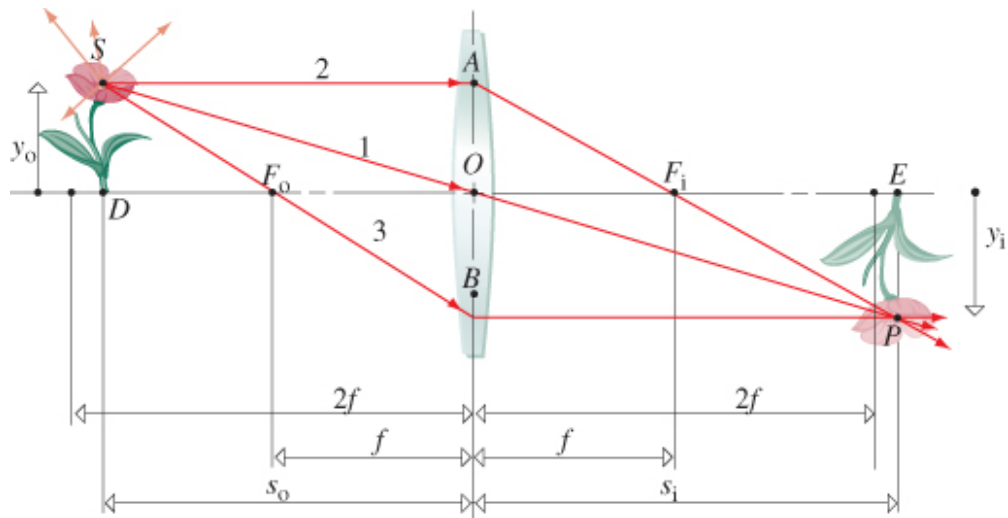
Appareil photo avec objectif de focale f fixe (pas de zoom) :

- si objet très éloigné ($s_o \sim \infty$) : $s_i = f$
- si objet peu éloigné : $s_i \uparrow$; pour focaliser sur le film on avance l'objectif (on éloigne la lentille du film)

Lentilles convergentes / divergentes : $f > 0$ / $f < 0$

Si le rayon lumineux se propage dans un milieu d'indice de réfraction η_o plutôt que dans l'air : on vérifie facilement qu'il suffit de remplacer $(\eta - 1)$ par $(\eta/\eta_o - 1)$

Formation des images



Trois rayons remarquables ;
construction point à point.

y_i taille de l'image, < 0 si
sous l'axe optique

G_T grandissement
transversal = $y_i / y_o = -s_i / s_o$

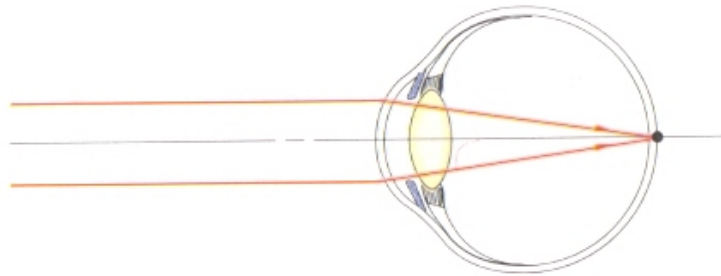
TABLEAU 26.3 Images des objets réels formées par des lentilles minces

Lentilles convergentes				
Objet	Image			
Position	Type	Position	Orientation	Taille relative
$\infty > s_o > 2f$	Réelle	$f < s_i < 2f$	Renversée	Réduite
$s_o = 2f$	Réelle	$s_i = 2f$	Renversée	Égale
$2f > s_o > f$	Réelle	$2f < s_i < \infty$	Renversée	Agrandie
$s_o = f$		$\pm \infty$		
$f > s_o > 0$	Virtuelle	$ s_i > s_o$	Droite	Agrandie

Lentilles divergentes				
Objet	Image			
Position	Type	Position	Orientation	Taille relative
Partout	Virtuelle	$ s_i < f , s_o > s_i $	Droite	Réduite

source : Hecht

3. L'oeil



source : Hecht

Cornée : majorité du pouvoir focalisant
 Cristallin : partie variable de la focalisation
 s_i fixe $\sim 17,1$ mm \Rightarrow accommodation :
 contraction des muscles autour du
 cristallin ; bombement ; puissance
 variable pour focaliser sur la rétine lorsque
 s_o varie

Punctum proximum, remotum ; oeil
 « standard » : p. proximum à 25 cm

Largeur max. de l'image d'un cheveu sur la rétine :

cheveu de $100 \mu\text{m}$ de diamètre regardé au p.proximum :

$y_i = -s_i \cdot y_o / s_o = -17,1 \text{ mm} \cdot 100 \mu\text{m} / 250 \text{ mm} \approx -7 \mu\text{m}$; renversée (mais
 perçue droite – transformation par le cerveau).

Taille de l'image de la Lune : vue sous un angle $\alpha_o = 9 \text{ mrad} = y_o / s_o$

$\Rightarrow y_i = -s_i \cdot \alpha_o = 150 \mu\text{m}$

4. Instruments d'optique

Loupe : grossit la taille de l'image sur la rétine en augmentant l'angle sous lequel l'objet est vu par l'oeil

On veut observer avec l'oeil détendu (sans accommodation) \Rightarrow rayons émergent // de la loupe \Rightarrow objet placé au foyer objet de la loupe

Pouvoir grossissant qualifié par rapport à la plus grande image possible à l'oeil nu, c.à.d. quand l'objet est au p. proximum d_p

Angle de vision au p.p. : $\alpha_p = y_o / d_p$

Angle de vision dans la loupe : $\alpha_a = y_o / f$

Grossissement angulaire : $G_A = \alpha_a / \alpha_p = d_p / f$

Microscope

Cas le plus simple: combinaison de 2 lentilles pour avoir un grossissement important d'un objet proche

Objectif : 1er grossissement

$\Rightarrow 2f_1 < s_{o,1} < f_1$; image réelle

$G_{T1} \uparrow \Rightarrow s_{o,1} \sim f_1$

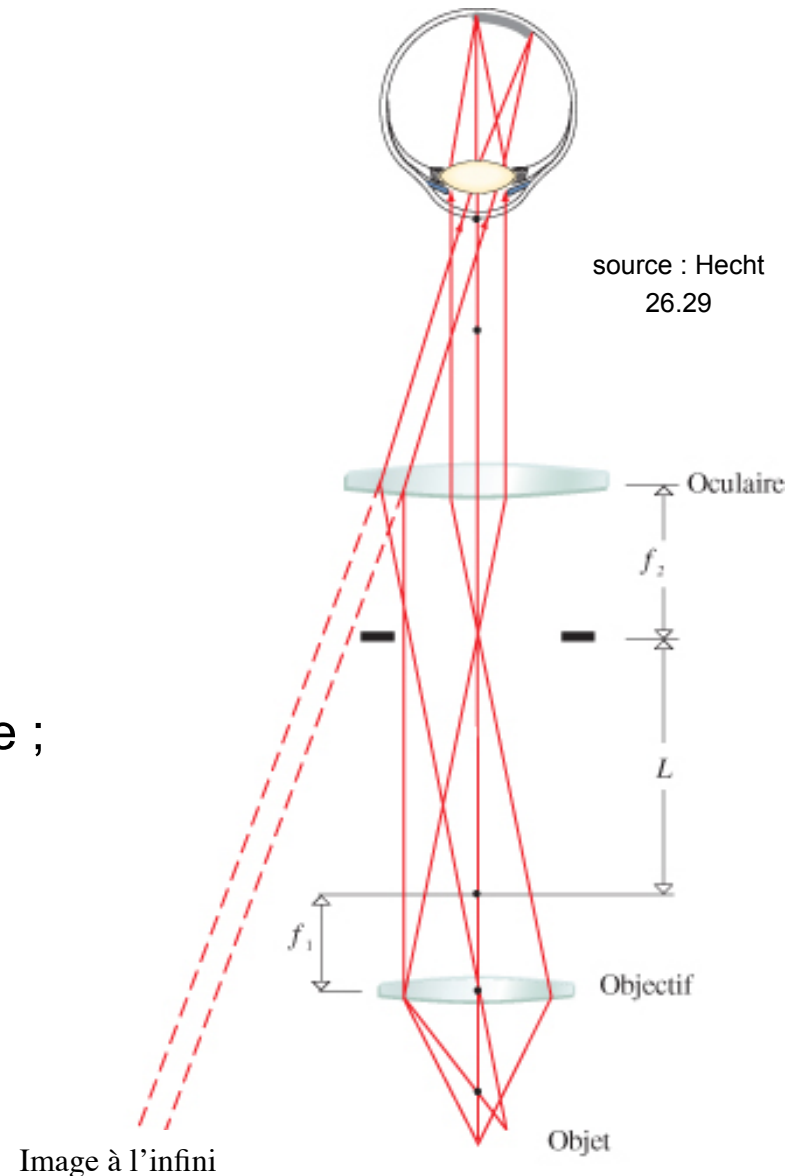
microscope compact $\Rightarrow s_{i,1}$ pas trop grand $\Rightarrow f_1$ petit

Oculaire : fonctionne comme une loupe ;

$G_{A2} = d_p / f_2$; $G_{A2} \uparrow \Rightarrow f_2$ petit

Grossissement angulaire total :

$$G_{AT} = G_{T1} \cdot G_{A2}$$



XI. Optique ondulatoire

1. Interférence

- Sources cohérentes ; cohérence de la lumière naturelle ; lasers
- Expérience de Young
- Couches minces
- Interféromètre de Michelson

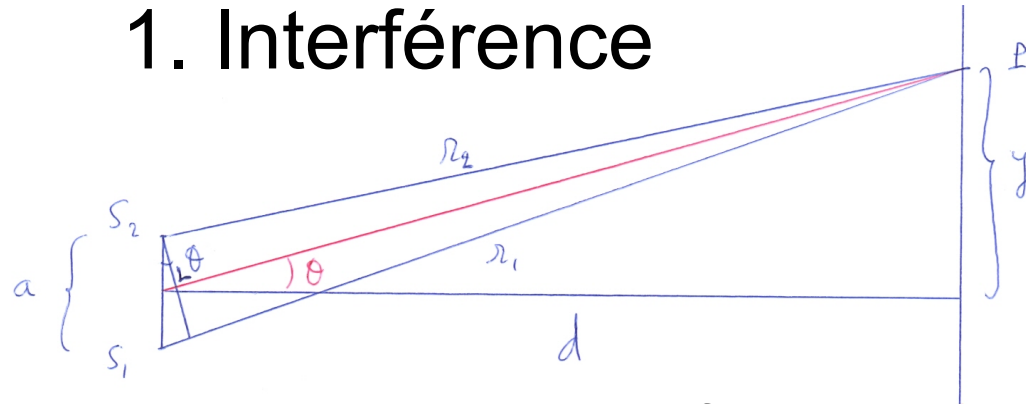
2. Polarisation

- Filtres polarisants
- Polarisation de la lumière naturelle

3. Diffraction

- Fente unique ; réseaux
- Ouverture circulaire

1. Interférence



Sources cohérentes en phase : phases relatives fixes

Deux sources cohérentes séparées d'une distance a ; observation sur un écran à grande distance d des sources ; angle θ petit

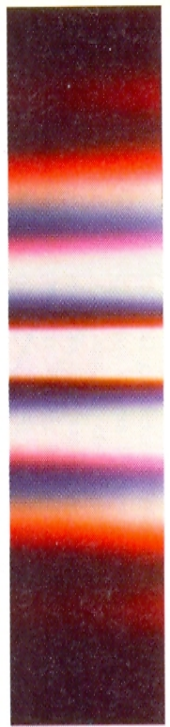
$$\Rightarrow r_1 - r_2 \approx a \sin \theta \approx a \cdot y/d$$

Maxima : $y = m \cdot \lambda \cdot d/a$; Minima : $y = (m+1/2) \cdot \lambda \cdot d/a$

\Rightarrow pour chaque λ , succession de maxima et minima (franges d'interférence) sur l'écran ; m « ordre » du maximum/minimum

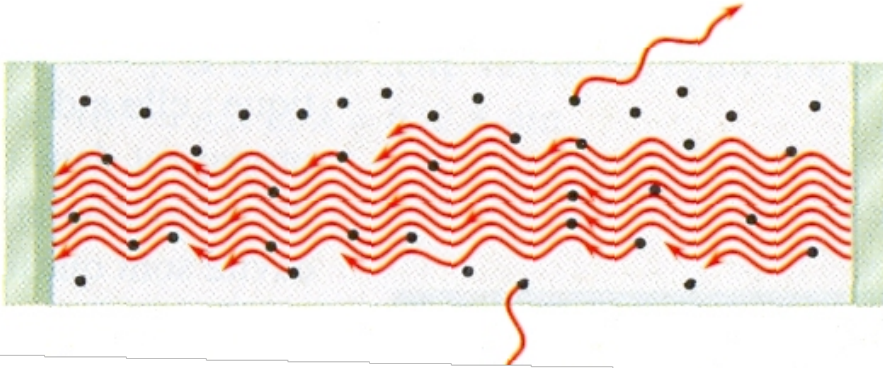
Deux sources déphasées de ϕ_0 : franges se décalent ; maxima pour $k \cdot a \cdot y/d = m \cdot 2\pi + \phi_0$

Lumière naturelle : électrons émettent la lumière par paquets d'onde de $\sim 10^{-8}$ secondes = photons d'énergie $h \cdot f$ (h = constante de Planck = $6,63 \cdot 10^{-34}$ J.s ; f = fréquence) ; de déphasages variables ; de fréquences différentes : incohérence de sources indépendantes



source : Hecht

Lasers



source : Hecht

Light Amplified by Stimulated Emission of Radiation: émission stimulée de photons de même énergie par des atomes excités préalablement

Effet quantique : émission de photons (bosons) en phase

Paquet d'ondes cohérent en phase et en fréquence ; longueur de cohérence (phase fixée) $\approx c \cdot 10^{-8} \text{ s} \approx 1 \text{ m}$

Interférence en lumière naturelle

Expérience de Young : fente suivie de deux fentes : le même front d'onde est la source des ondes cohérentes qui interfèrent

Couches minces : épaisseur de l'ordre de λ (bulles de savon, films polymères etc.)

Réflexions et réfractions multiples ; déphasage de π si réflexion interne
Conditions d'interférence max. et min. dépendent de l'épaisseur de la couche et des indices de réfraction des différents milieux

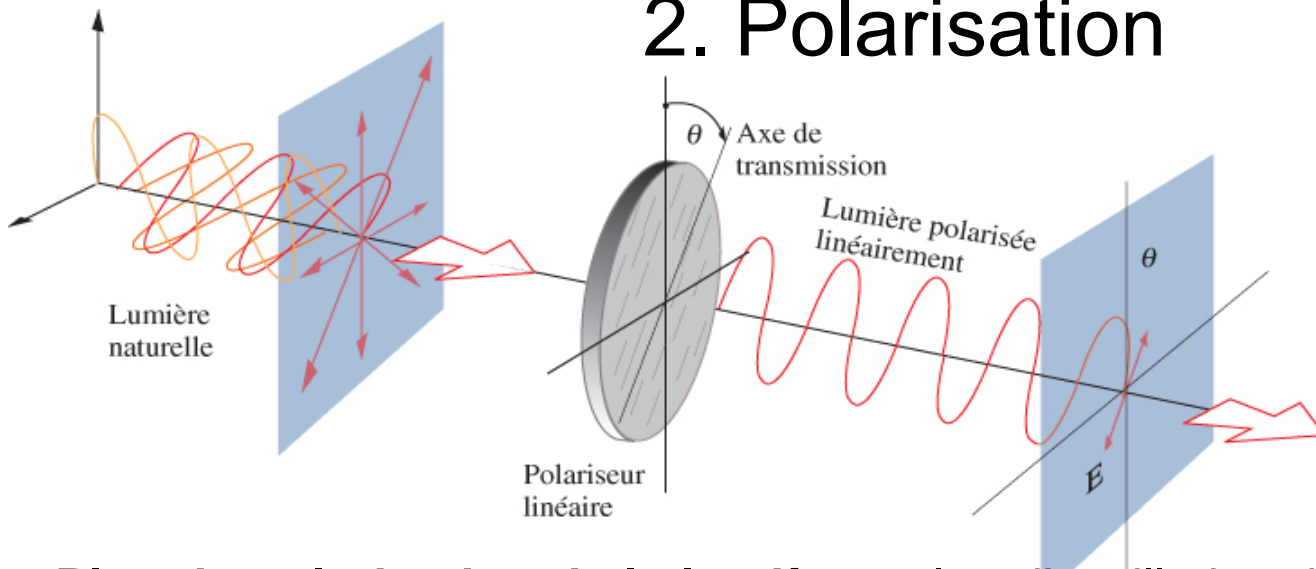
Application : couche antireflet

Interféromètre de Michelson : bras de longueurs géométriques fixes ; changement de la figure d'interférence si : changement de longueur géométrique d'un bras (sismographes), changement de densité dans un des bras (ex.: thermogramme)

Expérience de Michelson-Morley : interféromètre en mouvement avec la Terre par rapport au milieu hypothétique au repos où se propage la lumière (éther) \Rightarrow temps de parcours dans les 2 bras $\neq \Rightarrow$ figure d'interférence change si on tourne l'interféromètre de 90° .
Résultat négatif $\Rightarrow c =$ constante ; et le référentiel absolu n'existe pas

2. Polarisation

source : Hecht
27.6



Plan de polarisation de la lumière : plan d'oscillation du champ E.M.
Lumière naturelle : superposition de paquets d'onde E.M. de polarisations différentes \Rightarrow en moyenne non-polarisée

Filtre polarisant : ne laisse passer que la composante du champ // à l'axe de polarisation ; si onde incidente polarisée dans une direction faisant un angle θ avec l'axe, intensité transmise = $\cos^2\theta$.intensité incidente
(loi de Malus – cf. énergie d'une onde $\sim (A\omega)^2$)

Filtre polaroid : chaînes de molécules conductrices // ; réfléchissent la composante du champ // aux chaînes

Processus de polarisation

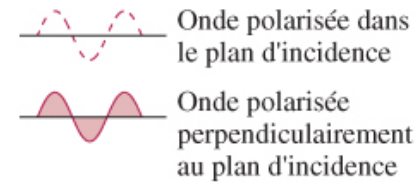
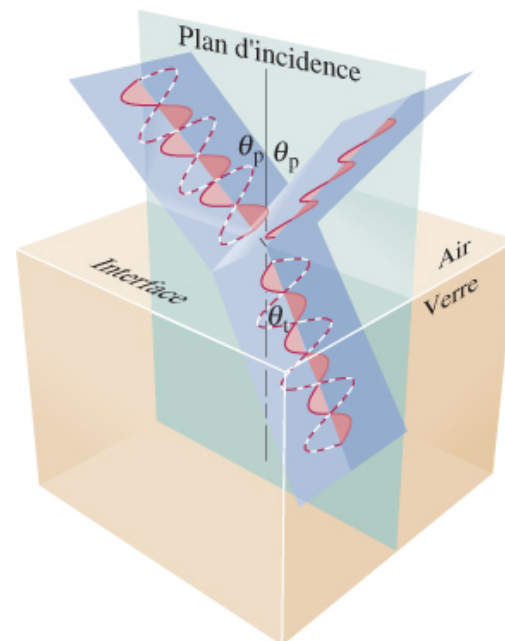
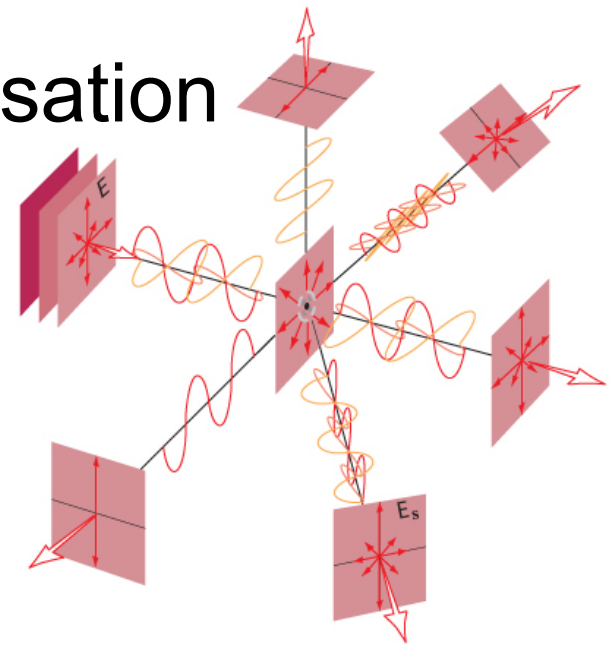
Par diffusion : diffusion dans toutes les directions mais seulement des composantes transverses

Par réflexion : les ondes réfléchies et transmises sont dues aux vibrations des atomes à l'interface.

La composante de ces vibrations à la fois dans le plan d'incidence et \perp au rayon réfléchi dépend de $\theta_r = \theta_i$ et de θ_t

Composante absente lorsque les rayons réfléchi et réfracté sont \perp c.à.d. pour un angle d'incidence appelé angle de Brewster :

$$\tan \theta_i = \eta_t / \eta_i$$



source : Hecht

3. Diffraction

Cas où l'image est formée à grande distance : rayons lumineux presque parallèles (diffraction de Fraunhofer - on peut utiliser une lentille pour observer la figure de diffraction de Fraunhofer sur un écran proche)

Par une fente unique (de largeur D) :

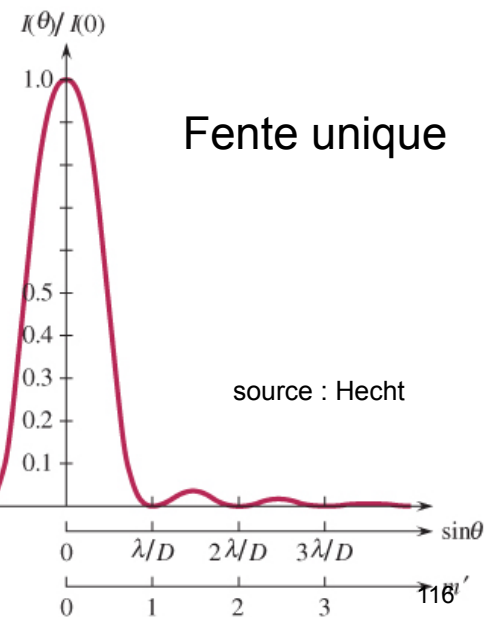
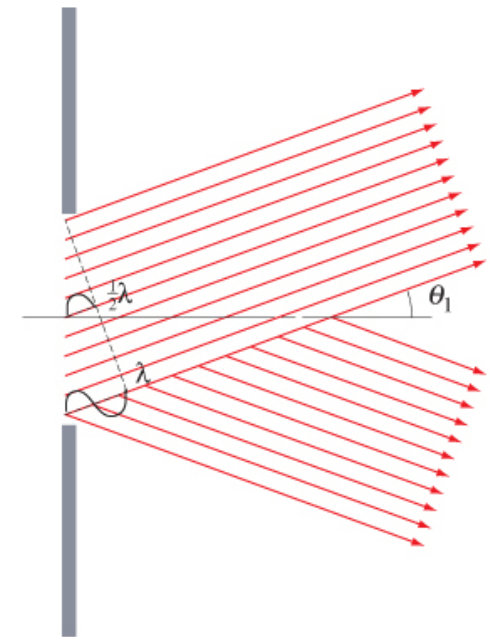
minima pour valeurs de θ t.q. : $D \sin \theta = m \cdot \lambda$

Pic de diffraction central s'élargit si la fente se rétrécit (fente infiniment mince \Rightarrow front d'onde cylindrique)

Positions des minima différentes pour différentes λ

Intensité des maxima secondaires $< 5\%$ intensité du pic central

Réseau de diffraction : plusieurs sources \Rightarrow franges de Young, étroites, mais intensité notable seulement dans la zone de superposition des pics de diffraction centraux de toutes les fentes



Tache d'Airy

L'image d'une source ponctuelle au travers d'une ouverture (ou une lentille) circulaire de diamètre D n'est plus ponctuelle

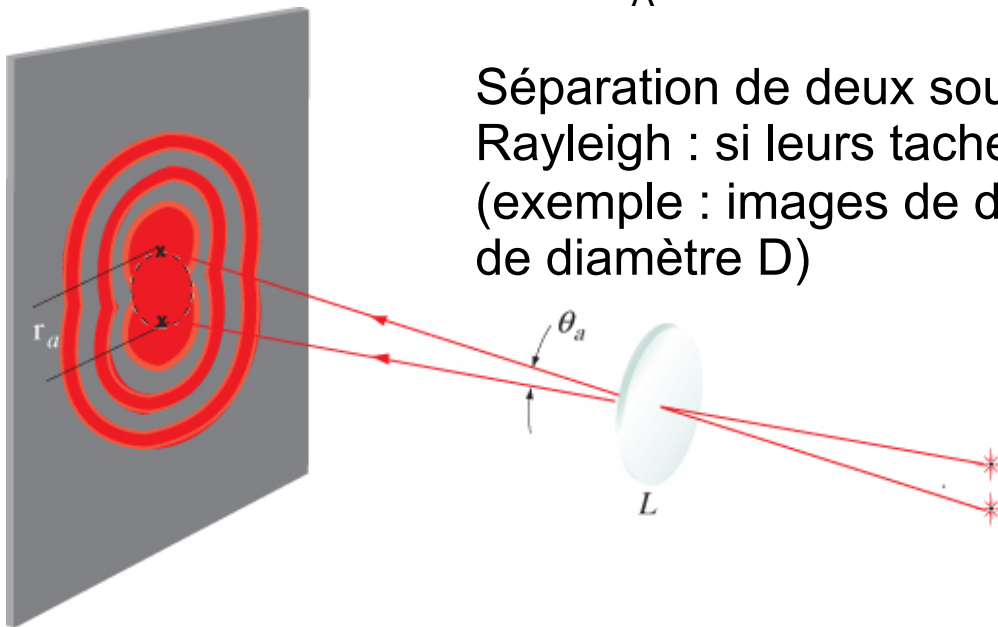
Figure de diffraction : tache centrale (tache d'Airy) puis anneaux lumineux secondaires

Ouverture angulaire de la tache d'Airy :

$$\theta_A = 1,22.\lambda / D$$

Séparation de deux sources ponctuelles : critère de Rayleigh : si leurs taches d'Airy sont distinctes (exemple : images de deux étoiles dans un télescope de diamètre D)

source : Hecht



Références :

E. Hecht, « Physique », De Boeck Université

www.brookscole.com/physics ->

introductory physics -> Hecht

F. Rothen, « Physique générale – La

physique des sciences de la nature et de

la vie », Presses polytechniques et

universitaires romandes

H. Benson, « Physique 1 (Mécanique) », De

Boeck Université