Corrigés des séances 7 et 8
Chap 8: Mouvements de rotation

Questions pour réfléchir

Q5. p.302. a) Est-ce qu'une petite force, agissant sur un corps, peut provoquer une accélération angulaire plus grande que celle qui est produite par une plus grande force? Expliquez. b) Si la vitesse angulaire d'un corps n'est pas nulle, est-ce que la résultante des moments des forces qui agissent sur lui est, elle aussi, non nulle? Expliquez.

a) Oui, si elle a un grand bras de levier. Supposons un corps qui tourne autour d'un axe de rotation A. Soit I_A son moment d'inertie autour de cet axe. Appliquons une force F dans une direction $\perp$ à l'axe, en un point du corps situé à une distance r de l'axe. La 2^e loi de Newton appliquée aux rotations s'écrit:

$$\vec{\tau_A}(\vec{F}) = \mathbf{I_A}\vec{\alpha} = \vec{r} \times \vec{F} = rF\vec{1_z},$$

où $\vec{\alpha}$ est l'accélération angulaire autour de A et $\vec{1_z}$ est un vecteur unité dirigé selon A et dont le sens positif est donné par la loi du tire-bouchon (ou de la main droite). En norme:

$$I_A\alpha = rF.$$

On obtient la même accélération angulaire avec une force F appliquée à une distance r qu'avec une force $F/2$ appliquée à une distance $2r$.
b) Pas nécessairement. S'il tourne à vitesse angulaire constante, il n'y a pas d'accélération angulaire, donc la résultante des moments des forces est nulle.

Exercices

10. [I] p.305. Quel est l'équivalent de 1,00 tour/min en rad/s ?

Un tour correspond à un angle $\Delta\theta$ de 2π radians. Exprimée en rad/s, une vitesse angulaire de 1,00 tour par minute vaut

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{60 \text{ s}} = 0,105 \text{ rad/s}.$$

14. [I] p.305. Le moteur électrique de vitesse variable d'une perceuse tourne à raison de 100 t/s. Il est uniformément accéléré à 50,0 t/s^2 jusqu'à 200 t/s. Combien de tours a-t-il fait pendant ce temps ?

Nous utilisons la relation

$$\omega^2_{finale} = \omega^2_{initiale} + 2\alpha\theta,$$

de façon similaire à la relation utilisée pour le mouvement rectiligne uniformément accéléré $v^2_{finale} = v^2_{initiale} + 2as$. Le nombre de tours vaut donc $\theta = (200^2 - 100^2)/(2.50, 0)$ tours $= 300$ tours.

20. [II] p.305. Un manège, dans un parc d'attraction, tourne normalement à raison de 0,40 rad/s quand le frein est enclenché; il commence alors à tourner suivant l'équation $\omega(t) = 0,40$ rad/s $- (0.080$ rad/s$^2).t$. Combien de temps faut-il pour qu'il s'arrête ? Quelle est son accélération angulaire ?

La vitesse angulaire du mouvement circulaire uniformément accéléré évolue selon la relation $\omega(t) = \omega_0 + \alpha.t$, où ω_0 est la vitesse angulaire initiale, et α est l'accélération angulaire. D'après l'énoncé, $\alpha = -0,080$ rad/s^2. Lorsque le manège s'arrête, $\omega(t) = 0$. Cela se passe après un temps

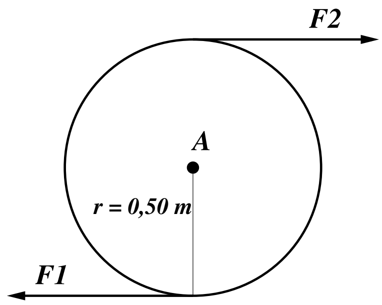
$$t = \frac{-\omega_0}{\alpha} = \frac{0,40}{0,08} \text{ s} = 5 \text{ s}.$$

26. [II] p.305. Une bicyclette, dont les roues ont un diamètre de 61 cm, roule à 16 km/h. A quelle vitesse angulaire les roues tournent-elles? Combien de temps faut-il pour qu'elles fassent un tour?

Roulement sans glissement: le vélo et donc les centres des roues avancent à une vitesse $v = R\omega$. La vitesse angulaire des roues est $\omega = \frac{(16/3,6) \text{ m/s}}{0,305 \text{ m}} = 15$ rad/s. Elles font un tour en un temps $t = 2\pi/\omega = 0,43$ s.

59. [I] p.308. Deux petites fusées sont montées tangentiellement en deux points symétriques par rapport à l'axe d'un satellite artificiel cylindrique. Le satellite a un diamètre de 1,0 m et un moment d'inertie de 25 kg.m^2 autour de son axe de symétrie. Les fusées sont montées en sens opposé, développant chacune une poussée de 5,0 N, pour produire un effet maximum de rotation. Quelle est l'accélération angulaire résultante quand les deux fusées agissent en même temps ?

Soient A l'axe de symétrie du satellite et $I_A = 25$ kg.m^2 le moment d'inertie par rapport à A.



La 2^e loi de Newton donne:

$$\sum \vec{\tau_A}(\vec{F}) = \vec{r_1} \times \vec{F_1} + \vec{r_2} \times \vec{F_2} = I_A \vec{\alpha}.$$

Dès lors

$$I_A \alpha = rF_1 + rF_2 = 2.0,50 \text{ m}.5,0 \text{ N}$$

Donc $\alpha = \frac{5 \text{ N.m}}{25 \text{ kg.m}^2} = 0,20$ rad/s^2.

60. [c] p.308. La fig. P60 montre une plaque mince homogène et rectangulaire de masse M. Déterminer son moment d'inertie autour d'un axe confondu avec son coté gauche. (Suggestion: décomposez la plaque en bandes comme dans la figure).

Une bande de largeur dr, de hauteur H et située à une distance r de l'axe a un moment d'inertie par rapport à cet axe, égal à $\sigma.dr.H.r^2$, où $\sigma = \frac{M}{L.H}$ est la masse par unité de surface. Le moment d'inertie total est la somme des contributions de toutes les bandes, c'est-à-dire

$$I_{Axe} = \int_0^L dr.H.\sigma.r^2 = \frac{L^3}{3}.H.\sigma = \frac{ML^2}{3}$$

(55.) [I] p.308. Le théorème des axes parallèles énonce que, si I_{cm} est le moment d'inertie d'un corps autour d'un axe passant par son centre de masse, le moment d'inertie I autour d'un axe parallèle au précédent est donné par $I = I_{cm} + md^2$, où m est la masse du corps et d est la distance entre les 2 axes. Utilisez ce thérorème et le moment d'inertie d'une tige de longueur l autour d'un axe perpendiculaire pasant par son centre de masse, $I_{cm} = (1/12)ml^2$, pour calculer son moment d'inertie autour d'un axe perpendiculaire passant par son extrémité.

La tige est supposée cylindrique et homogène. Le centre de masse est alors au milieu de la tige. Le moment d'inertie autour de l'axe passant par son extrémité vaudra $I = I_{cm} + m(l/2)^2 = ml^2/3$.

66. [II] p.309. Calculez le moment cinétique orbital de Jupiter autour du Soleil ($M_J = 1,9.10^{27} kg$, $r_{SJ} = 7,8.10^{11} m$ et $v_J = 13,1.10^3 m/s$) et comparez-le au moment cinétique de rotation du Soleil ($M_S = 1,99.10^{30} kg$, $R_S = 6,96.10^8 m$). Pour cela on suppose que le Soleil, dont l'équateur fait un tour complet en 26 jours, est une sphère rigide de densité uniforme.

Comme le rayon de la planète Jupiter est très petit par rapport au rayon de son orbite, Jupiter peut être approximé par un point matériel de masse $M_J = 1,9.10^{27}$ kg sur une trajectoire de rayon $r_{SJ} = 7,8.10^{11}$ m. Le moment cinétique orbital de Jupiter autour du Soleil vaut alors

$$L_J = r_{SJ}.p_J,$$

où p_J est la quantité de mouvement de Jupiter ($p_J = M_J.v_J = 1,9.10^{27}$ kg $\times$ $13,1.10^3$ m/s $= 2,5.10^{31}$kg m/s). Donc $L_J = 7,8.10^{11}$ m $\times$ $2,5.10^{31}$kg m/s $=$ $1,9.10^{43}$ kg m^2/s. Le Soleil, supposé sphérique, rigide et homogène, a un moment cinétique dû à sa rotation autour de son axe, égal à

$$L_S = I_S\omega = \frac{2}{5}M_S R_S^2 \omega,$$

où la vitesse angulaire de la rotation du Soleil sur son axe $\omega = \frac{2\pi}{26.24.3600\text{ s}} =$ $2,8.10^{-6}$ rad/s. Dès lors $L_S = \frac{2}{5}.1,99.10^{30}$ kg.$(6,96.10^8$ m$)^2.2,8.10^{-6}$ rad/s $=$ $1,1.10^{42}$ kg m^2/s. Le moment cinétique orbital de Jupiter autour du Soleil est environ 20 fois plus élevé que le moment cinétique de rotation du Soleil sur lui-même.

67. [II] p.309. Une roue de bicyclette, de diamètre 66 cm et de masse 1,46 kg, est libre de tourner autour de son axe horizontal. Elle est soumise à un moment de force de 68 N.m. Déterminez l'accélération angulaire de la roue, en supposant que toute sa masse est concentrée sur la jante. Que deviendrait cette accélération si la roue était pleine et de même masse (faites le calcul en approximant cette fois la roue par un disque homogène) ?

La jante peut être approximée par un anneau mince de rayon R et de masse m. Son moment d'inertie vaut $I_{jante} = mR^2 = 1,46$ kg.$(0,33$ m$)^2 = 0,16$ kg/m^2. Par la 2^e loi de Newton, son accélération angulaire vaudra

$$\alpha = \tau / I_{jante} = 68 \text{ N.m} / 0,16 \text{ kg/m}^2 = 425 \text{ rad/s}^2.$$

Dans le cas d'une roue pleine de même masse et de même rayon, assimilée à un disque homogène, on trouve $I = \frac{1}{2}mR^2 = 0,080$ kg/m^2, soit la moitié de l'inertie d'une roue où toute la masse est concentrée sur la jante. Donc, si les deux roues sont de même masse, l'accélération angulaire de la roue pleine est deux fois plus grande.

Exercices: Conservation du moment cinétique

53. [I] p.307. Pour exécuter un saut périlleux, un gymnaste accroit sa vitesse angulaire d'un facteur 4,5, en prenant une posture groupée au lieu de sauter les bras tendus au-dessus de la tête. Que pouvez vous dire de la variation de son moment d'inertie par rapport à un axe passant par son centre de masse et parallèle à la ligne qui joint ses épaules ?

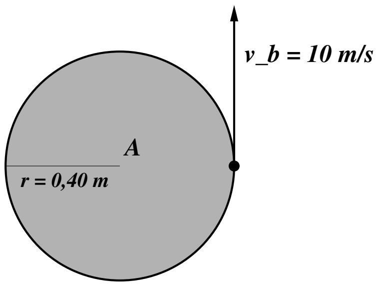
Lors du saut périlleux, l'axe passant par le centre de gravité du gymnaste et parallèle à la ligne qui joint ses épaules constitue l'axe autour duquel le corps du gymnaste tourne. La seule force extérieure qui s'exerce sur le gymnaste est son poids. Le moment de forces du poids par rapport au centre de gravité est nul. Dès lors le moment cinétique $L = I\omega$ est conservé. Si ω est multiplié par 4,5, alors le moment d'inertie I est divisé par 4,5 en groupant le corps lors du saut.

73. [II] p.309. Un disque mince de masse 1,0 kg et de diamètre 80 cm est libre de tourner horizontalement autour d'un axe vertical en son centre. Le disque est initialement au repos. Une petite boule d'argile de 1,0 g est lancée à une vitesse de 10,0 m/s tangentiellement au disque. Elle vient se coller au bord du disque. Calculez le moment d'inertie autour de l'axe (a) de la boule d'argile, (b) du disque et (c) de l'ensemble boule-disque. (d) Quelle est la quantité de mouvement de l'argile avant l'impact ? (e) Quel est le moment cinétique de l'argile par rapport à l'axe juste avant l'impact ? (f) Quelle est la vitesse angulaire du disque après l'impact ?

(a) La petite boule d'argile peut être assimilée à un point matériel de masse $m_b = 1,0.10^{-3}$ kg. Son inertie autour de l'axe du disque vaudra

$$I_b = m_b r^2,$$

où r est la distance entre l'axe du disque et la boule, et est égale au rayon du disque $r_d = 0,40$ m. Donc $I_b = 1,6.10^{-4}$ kg m^2.



(b) L'inertie du disque autour d'un axe perpendiculaire passant par son centre vaut

$$I_d = \frac{1}{2} m_d r_d^2 = 8,0.10^{-2} \text{ kg m}^2.$$

(c) L'inertie de l'ensemble boule-disque vaut

$$I_{b+d} = I_b + I_d \simeq 8,0.10^{-2} \text{ kg m}^2.$$

(d) La quantité de mouvement de la boule d'argile avant l'impact est

$$p_b = m_b.v_b = 1,0.10^{-2} \text{ kg m/s}.$$

(e) Le mouvement de la boule est tangentiel au disque, donc le vecteur quantité de mouvement de la boule est $\perp$ au rayon du disque au point de contact. Le moment cinétique de la boule d'argile par rapport à l'axe du disque vaut

$$L_b = r.p_b = 4,0.10^{-3} \text{ kg m}^2\text{/s}.$$

(f) Par conservation du moment cinétique, le moment cinétique du système boule-disque vaut $L_{b+d} = L_b$. La vitesse de rotation du système boule-disque autour de l'axe du disque sera donnée par $L_{b+d} = \omega I_{b+d}$. Donc

$$\omega = 4,0.10^{-3} \text{ kg m}^2\text{/s}/8,0.10^{-2} \text{ kg m}^2 = 5,0.10^{-2} \text{ rad/s}.$$

81. [III] p.309. Un astronaute travaille à une distance de 100 m d'une station spatiale, lié à celle-ci par une corde. Il a, avec son équipement, une masse de 150 kg. Une fuite apparaît dans le tuyau d'air de son sac dorsal. L'échappement des gaz produit une poussée qui le fait tourner autour de la station avec une accélération $a_T = 1,0 \times 10^{-3} g$. Après deux minutes, l'astronaute se rend compte de la fuite et la répare. Quelle est alors sa vitesse tangentielle autour de la station ? Il decide de rentrer à la station en se tirant à la corde à la force des bras. En supposant qu'il arrive à 5,0 m de distance du vaisseau, à quelle vitesse tangentielle tourne-t-il à présent ? Quelle force minimum doit-il exercer sur la corde ? Est-ce possible ?

La vitesse de rotation autour de la station après 120 s d'accélération vaut

$$v = a_T.t = 1,0 \times 10^{-3}.9,81 \text{ m/s}^2.120 \text{ s} = 1,2 \text{ m/s}.$$

Le moment cinétique de l'astronaute par rapport à la station vaut alors

$$|\vec{L}| = |\vec{r} \times \vec{p}| = d.m.v,$$

où d est la distance au vaisseau, m la masse de l'astronaute et v la vitesse de rotation.

$$L = 100.150.1,2 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}} = 1,8.10^4 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}.$$

Lorsque l'astronaute se hisse à la corde, il exerce une force normale à son mouvement de rotation. Le moment de cette force par rapport à l'axe de la rotation étant nul, le moment cinétique de l'astronaute est conservé. La vitesse de rotation v' à une distance $d' =$ 5 m est donc égale à

$$v' = \frac{L}{d'.m} = \frac{1,8.10^4}{5.150} \text{ m/s} = 24 \text{ m/s}.$$

La force centripète que doit exercer l'astronaute en tirant sur la corde vaut alors:

$$F_c = \frac{mv'^2}{d'} = \frac{150.24^2}{5,0} \text{ N} = 17.10^3 \text{ N !}$$

C'est absolument impossible.

Exercices: Dynamique de la rotation: poulies massives

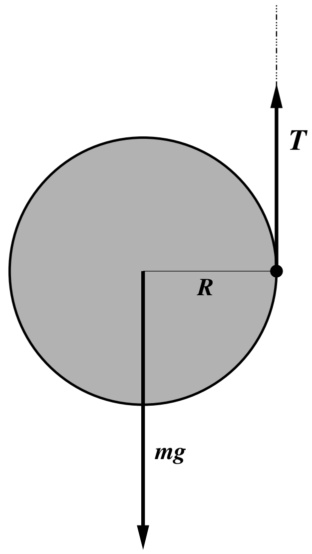
82. [III] p.310. Une corde sans masse est enroulée sur un certain nombre de tours autour d'une poulie cylindrique pleine, de masse m, de rayon R. On fixe une extrémité de la corde à un crochet. La poulie est tenue à la main à une certaine hauteur, corde tendue. On libère alors la poulie, qui tombe verticalement en déroulant le fil. Quelle est son accélération linéaire ? Quelle est la tension dans la corde avant que celle-ci ne soit complètement déroulée ?

L'accélération du centre de masse de la poulie vers le bas est due à la résultante des forces qui agissent sur la poulie. Deux forces agissent: le poids de la poulie mg et la tension de la corde T. En prenant la direction positive des forces vers le bas on a:

$$ma = mg - T. \qquad (a)$$

L'accélération angulaire de la poulie autour de son axe est due à la somme des moments de forces par rapport à cet axe. Le moment du poids par rapport à l'axe est nul. Donc

$$I\alpha = R.T, \qquad (b)$$



où I est le moment d'inertie de la poulie. En approximant la poulie par un disque, $I = mR^2/2$.
Enfin, comme la corde se déroule sans glissement, l'accélération linéaire est liée à l'accélération angulaire par

$$a = R\alpha \qquad (c)$$

De (c) on trouve $\alpha = a/R$. En remplaçant α et I par leurs expressions dans (b) on trouve $a = (R^2.T)/(mR^2/2) = 2T/m$. En résolvant le système des équations (a) et (b) on trouve

$$a = \frac{2}{3}g$$

et

$$T = \frac{mg}{3}.$$

QUESTION DE L'EXAMEN DE JUIN 2005

Un mécanicien travaille sur une roue de 20 kg, d'un diamètre de 40 cm.

a. Quel est le moment d'inertie de cette roue, si elle est assimilée à un disque homogène ?

b. Le mécanicien constate, quand il fait tourner la roue dans le plan vertical (l'axe étant donc horizontal), qu'elle s'arrête toujours dans la même position. Que se passe-t-il ? Que peut-on dire de la position du centre de masse de la roue à ce moment-là ?

c. Le mécanicien décide donc d'équilibrer la roue, en plaçant un plomb sur la jante (c'est-à-dire sur la circonférence de la roue). Comment sait-il où il doit placer le plomb ?

d. Il détermine expérimentalement qu'il doit placer un plomb de 30 grammes. Comment trouve-t-il cette valeur ?

e. A quelle distance de l'axe se trouvait le centre de masse de la roue ?

f. De combien a été modifié le moment d'inertie de la roue ?

g. Quelle proportion de l'inertie de la roue cela représente-t-il ? Comparez avec le rapport des masses, et expliquez ce que vous observez.

a. Le moment d'inertie de la roue est

$$I = \frac{1}{2}MR^2 = 0,5.20.0,20^2 = 0,4 \text{ kg.m}^2.$$

b. Dans la position où la roue s'arrête toujours, son centre de masse est à la verticale sous l'axe (position d'équilibre stable).

c. Il doit placer le plomb, sur la roue à l'arrêt, à la verticale de l'axe, de manière diamétralement opposée au centre de masse.

d. Il ajuste la masse de plomb de manière à équilibrer la roue, ce qu'il vérifie par le fait que désormais celle-ci s'arrête dans une position quelconque.

e. Maintenant que la roue est en équilibre, le moment de la force de gravitation par rapport à l'axe est nul. Si m_{roue} est la masse de la roue avant équilibrage, et d_{roue} la distance de son centre de masse à l'axe, on a:

$$m_{roue}.d_{roue} - m_{plomb}.R = 0,$$

donc

$$d_{roue} = 0,030 \text{ kg}.0,20 \text{ m}/20 \text{ kg} = 30.10^{-5} \text{ m}.$$

Le centre de masse de la roue est situé à 0,30 mm de son axe.

f. Le moment d'inertie supplémentaire dû au plomb est

$$I_{plomb} = m_{plomb}.R^2 = 0,030 \text{ kg}.(0,20 \text{ m})^2 = 12.10^{-4} \text{ kg.m}^2.$$

g. Ceci représente 3.10^{-3} du moment d'inertie de la roue, alors que le rapport des poids est de $1,5.10^{-3}$. Le rapport plus grand des moments d'inertie est dû au fait que le plomb est posé à la circonférence de la roue, et que la contribution de chaque masse au moment d'inertie augmente comme le carré de la distance à l'axe.

QUESTION DE L'EXAMEN D'AOUT 2006

Un axe vertical tourne à la vitesse angulaire uniforme de 30 rad/s. Deux baguettes, longues de 20 cm et de masse négligeable, sont attachées à cet axe, perpendiculairement à lui et à $180°$ l'une de l'autre; leurs points de fixation, A et B, sont distants de 40 cm. Chaque baguette porte à son extrémité une masse de 500 g. Déterminez le moment cinétique du système par rapport au point de fixation de la baguette la plus haute (point A). Idem par rapport à l'autre point de fixation (point B). On prendra l'axe z vertical et dirigé vers le haut, l'axe x horizontal et dirigé vers la droite, l'axe y horizontal et entrant dans la feuille.

La quantité de mouvement de chaque masse vaut:

$$\begin{aligned} \vec{p} &= m\vec{v} = m\omega r \vec{1_\perp} \\ &= 0,500.30.0,20 \text{ kg.m/s} \vec{1_\perp} \\ &= 3,0 \text{ kg.m/s}.\vec{1_\perp}, \end{aligned}$$

le vecteur $\vec{1_\perp}$ étant dirigé selon $\vec{1_y}$ pour la masse attachée à la baguette fixée en A, et selon $-\vec{1_y}$ pour celle fixée en B. Appelons masse 1 [2] celle attachée à la baguette fixée en A [B]. La quantité de mouvement de la masse 1 selon y est > 0 et celle de 2 est < 0.
Moment cinétique du système par rapport au point A:

$$\begin{aligned} \vec{L_A} &= \vec{r_1} \times \vec{p_1} + \vec{r_2} \times \vec{p_2}. \\ \vec{r_1} \times \vec{p_1} &= 0,20.\vec{1_x} \times 3,0.\vec{1_y} \\ &= 0,60 \text{ kg.m}^2\text{/s}.\vec{1_z}. \\ \vec{r_2} \times \vec{p_2} &= (-0,20.\vec{1_x} - 0,40.\vec{1_z}) \times 3,0.(-\vec{1_y}) \\ &= 0,60 \text{ kg.m}^2\text{/s}.\vec{1_z} - 1,20 \text{ kg.m}^2\text{/s}.\vec{1_x}. \\ \vec{L_A} &= 1,20 \text{ kg.m}^2\text{/s}.\vec{1_z} - 1,20 \text{ kg.m}^2\text{/s}.\vec{1_x}. \end{aligned}$$

Le moment cinétique par rapport au point B vaudra:

$$\begin{aligned}
\vec{r_1} \times \vec{p_1} &= (0,20.\vec{1_x} + 0,40.\vec{1_z}) \times 3,0.\vec{1_y} \\
&= 0,60 \text{ kg.m}^2\text{/s}.\vec{1_z} - 1,20 \text{ kg.m}^2\text{/s}.\vec{1_x}. \\
\vec{r_2} \times \vec{p_2} &= -0,20.\vec{1_x} \times 3,0.(-\vec{1}_y) \\
&= 0,60 \text{ kg.m}^2\text{/s}.\vec{1_z}. \\
\vec{L_A} &= 1,20 \text{ kg.m}^2\text{/s}.\vec{1_z} - 1,20 \text{ kg.m}^2\text{/s}.\vec{1_x}.
\end{aligned}$$

Il est le même par rapport à tout point de l'axe.