Ressources

Christel Depotte
Yasmina Djegham
Guy Noël
Jean-Claude Verhaeghe

MATHÉMATIQUE & BIOLOGIE

UNE EXPÉRIENCE PLURIDISCIPLINAIRE

CD-Rom gratuit

de boeck

Des mathématiques expérimentales : les mystères du nombre e révélés par les levures de bière

J.C. Verhaeghe

Y. Djegham

Chr. Depotte

G. Noël

UMH

UNIVERSITE DE MONS-HAINAUT

UNE VISION CLASSIQUE DES COURS DE MATHÉMATIQUES

Extrait de :
« ALGÈBRE 2B »
S. LORENT ET R. LORENT
DE BOECK 1965

« POSONS »

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

On apprend de plus que :

- e est irrationnel
- e est transcendant et vaut 2,71828...
- les logarithmes naturels sont ceux de base e

avec :

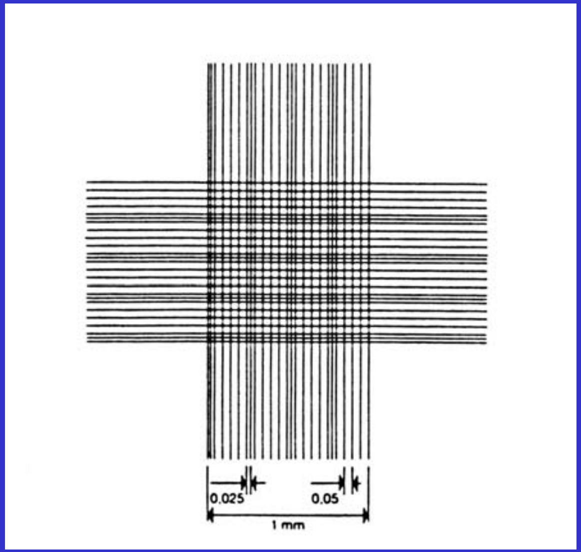
$$x = \log_e N$$

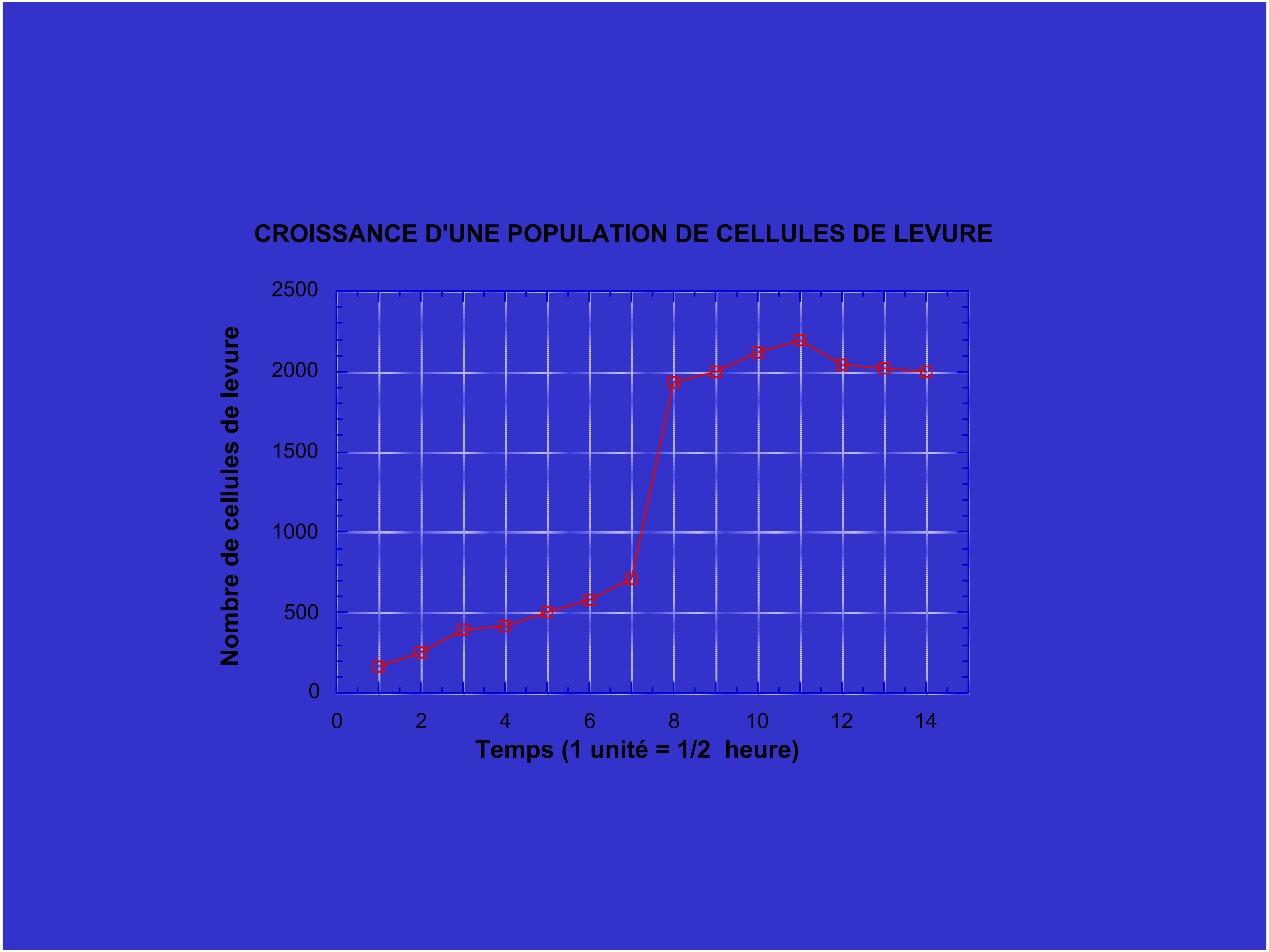
$$e^x = N$$

LES LEVURES DE BIÈRE À LA RESCOUSSE ...

- MISE EN ÉLEVAGE D ’UNE POPULATION DE LEVURES

- COMPTAGE TOUTES LES DEMI-HEURES
DU NOMBRE DE LEVURE PRÉSENTES
DANS UN VOLUME DE 0,1 . 10^{-3} mL




CROISSANCE D'UNE POPULATION DE CELLULES DE LEVURE
Nombre de cellules de levure
2500
2000
1500
1000
500
0
0
2
4
6
8
10
12
14
Temps (1 unité = 1/2 heure)

QU ’EST-CE QUE LA CROISSANCE D ’UNE POPULATION

PRINCIPE : TOUTE CELLULE PROVIENT D ’UNE AUTRE CELLULE

Dès lors, on peut calculer le rapport entre deux états de la population : au temps t et au temps t+1

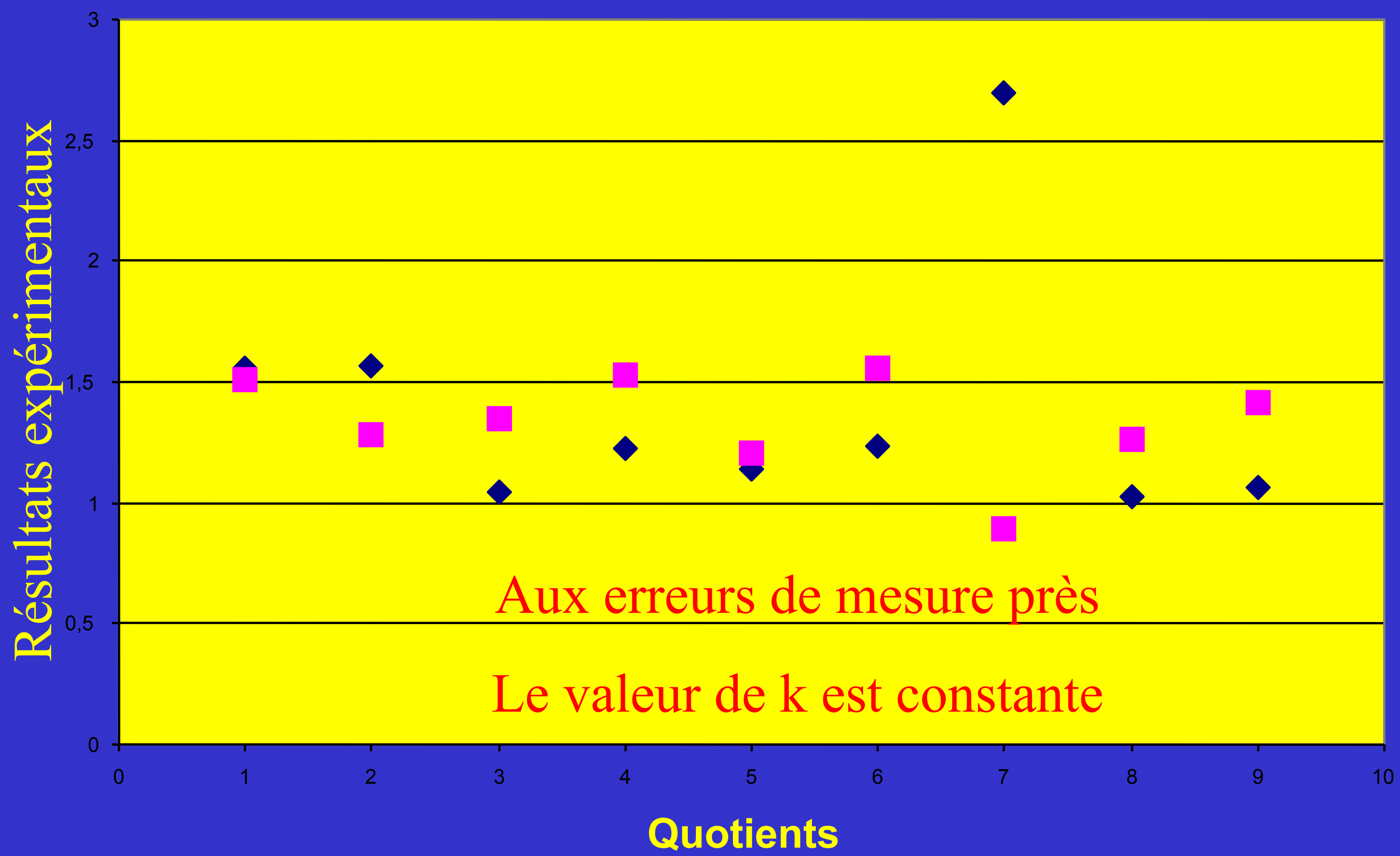
$$N(t) \xrightarrow{\text{Reproduction}} N(t+1)$$

$$\boxed{k = \frac{N(t+1)}{N(t)}}$$

QUOTIENT	1ére Expérience	2ème Expérience
N(1)/N(0)	250/160 = 1,56	261/172 = 1,51
N(2)/N(1)	394/250 = 1,57	336/261 = 1,28
N(3)/N(2)	410/394 = 1,04	456/336 = 1,35
N(4)/N(3)	502/410 = 1,22	700/456 = 1,53
N(5)/N(4)	576/502 = 1,14	852/700 = 1,21
N(6)/N(5)	712/576 = 1,23	1336/852 = 1,56
N(7)/N(6)	1928/ 712 = 2,70	1200/1336 = 0,89
N(8)/N(7)	2000/1928 = 1,03	1516/1200 = 1,26
N(9)/N(8)	2120/2000 = 1,06	2152/1516 = 1,41

K = 1,34

Calcul de k = N(t+1)/N(t)



Si $N(t+1) = k\, N(t)$

Alors

$N_{(1)} = k * N_{(0)}$

$N_{(2)} = k * N_{(1)} = k^2 * N_{(0)}$

$N_{(3)} = k * N_{(2)} = k^3 * N_{(0)}$

.....

Le taux de croissance de la population est le coefficient k^t

$N_{(0)}$ est le nombre initial de levures

$$N_t = k^t * N_{(0)}$$

$$N_{(t)} = k^t * N_{(0)}$$

Avec k = 1,34 en moyenne <u>mais</u>
Cette valeur dépend de l '<u>intervalle de mesure</u> (ici 1/2heure)

Supposons maintenant que l 'on fasse des mesures à des intervalles de plus en plus rapprochés...

QU 'EST-CE QUE LA CROISSANCE D 'UNE POPULATION?

CALCULONS L 'ÉVOLUTION D 'UNE POPULATION DE CELLULE PENDANT UN INTERVALLE DE TEMPS Δt

$$N(t) \xrightarrow[\Delta t]{\text{Reproduction}} N(t) + \Delta N$$

Avec,

si $\Delta t = 1$

$$r_{(1)} = \frac{\Delta N}{N \Delta t} = \frac{N(1) - N(0)}{1 * N(0)} = \frac{N(1)}{N(0)} - 1 = k - 1$$

$r_{(t)}$ est un taux de croissance

par cellule et par unité de temps Δt

Si $\Delta t=1$

Alors la croissance sur une
période est k
et **r = k-1**

Si $\Delta t=1/2$

Alors la croissance sur une demi période est $k^{1/2}$
car $k^{1/2} * k^{1/2} = k$
et $k^{1/2} = N(1/2)/N(0)$

$$r_{(1/2)} = \frac{\Delta N}{N \Delta t} = \frac{N(1/2) - N(0)}{1/2 * N(0)} = 2 * \left(\frac{N(1/2)}{N(0)} - 1\right) = 2 * \left(k^{1/2} - 1\right)$$

Si $\Delta t = 1/3$

$$r_{(1/3)} = \frac{\Delta N}{N \Delta t} = \frac{N(1/3) - N(0)}{1/3 * N(0)} = 3 * \left(\frac{N(1/3)}{N(0)} - 1\right) = 3 * (k^{1/3} - 1)$$

Si $\Delta t = 1/n$

$$r_{(1/n)} = \frac{\Delta N}{N \Delta t} = \frac{N(1/n) - N(0)}{1/n * N(0)} = n * \left(\frac{N(1/n)}{N(0)} - 1\right) = n * (k^{1/n} - 1)$$

Si $\Delta t=1/n$

$$r_{(1/n)}=\frac{\Delta N}{N\Delta t}=\frac{N(1/n)-N(0)}{1/n*N(0)}=n*\left(\frac{N(1/n)}{N(0)}-1\right)=n*(k^{1/n}-1)$$

Si l 'on fait
tendre n vers l 'infini, on a l 'expression

$$r=\lim_{n\longrightarrow\infty} n(k^{1/n}-1)$$

$$r = \lim_{n \longrightarrow \infty} n(k^{1/n} - 1)$$

Cette fonction est le logarithme népérien de k

$$\mathbf{r = \log_e k}$$

Si $r = \log_e k$

alors $EXP(r) = k$

qui est la fonction réciproque de k

Continuons le raisonnement

$$r_{(1/n)} = n\,(k^{1/n} - 1)$$

Donc $k = (1 + r_{(1/n)}/n)^n$

et

$$\boxed{k = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n}$$

$$EXP(r) = k = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = e^r$$

On comprend maintenant pourquoi :
- on passe à la limite
- n se trouve à la fois au dénominateur du second terme et en exposant

En particulier si r = 1 alors

$$EXP(1) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

EXP(1) est un nombre que l 'on désigne par la lettre e

CALCUL DE LA VALEUR DE e

VALEURS DE n	**$(1+1/n)^n$**
1	2
100000	2,7182682
200000	2,718275
300000	2,7182773
400000	2,7182784
500000	2,7182791
1000000	2,7182805

<u>EN CONCLUSION</u>

- LES FONCTIONS « LOGARITHME NÉPÉRIEN » ET « EXPONENTIELLE » SONT ANCRÉES DANS LE CONCRET.
- ON MONTRE QUE LA FONCTION EXPONENTIELLE APPARAÎT CHAQUE FOIS QUE LE TAUX D 'ACCROISSEMENT DE QUELQUE CHOSE EST LIÉ À LA QUANTITÉ DÉJÀ PRÉSENTE.
- ON COMPREND AINSI POURQOI LA FONCTION EXPONENTIELLE CONCERNE AUSSI BIEN LA CROISSANCE D 'UNE POPULATION, UNE DÉSINTÉGRATION RADIOACTIVE OU DES INTÉRÊTS COMPOSÉS,…, ELLE EST D 'UN INTÉRÊT GÉNÉRAL.
- LA COMPRÉHENSION DE LA DYNAMIQUE DES POPULATIONS EST CONSIDÉRABLEMENT RENFORCÉE.