

RELATIVITE RESTREINTE

Introduction

A la fin du 19eme siècle, la physique a atteint un niveau de développement remarquable. Un vaste ensemble de phénomènes naturels sont expliqués. La mécanique de Newton constitue le fondement de l'étude des fluides et bien d'autres. La théorie de l'électromagnétisme de Maxwell fournit une explication unifiée des phénomènes magnétiques et électriques. Cependant, certaines énigmes demeuraient et on espérait qu'elles soient facilement éclaircies bientôt. Mais ce ne fut pas chose facile jusqu'à la découverte de deux théories révolutionnaires : la théorie de la relativité et la théorie des quanta. C'est la naissance de la physique moderne. Quand est-il de la physique classique ? Nous répondrons plus tard à cette question. Nous allons développer dans ce cours la théorie de la relativité restreinte d'Albert Einstein.

I. Comparaison avec la relativité Galiléenne ou newtonienne :

Les systèmes de référence utilisés en relativité restreinte sont des systèmes inertiels. Un système se déplaçant à une vitesse constante par rapport à un système inertiel est aussi un système inertiel (ex : un train se déplaçant à vitesse constante par rapport a la terre).

Certains points de la relativité newtonienne sont en accord avec la relativité restreinte. C'est le cas de la validité des lois de la mécanique dans tout système inertiel. Cependant les suppositions sur lesquelles reposent la relativité newtonienne sont indémontrables et repose sur nos observations quotidiennes. Ordinairement on sait que la longueur des corps et le temps ne varient pas selon le référentiel. Ils sont considérés comme absolus, tout comme les forces et les masses.

II. Imperfection de la théorie de l'électromagnétisme de Maxwell :

Selon cette théorie, la lumière est considérée comme une onde électromagnétique avec une vitesse de $c=3.10^8$ m/s. la question était de savoir dans quel système de référence cette vitesse avait été mesurée. On prétendait que des voyageurs voyageant à une vitesse de 1.10^8 m/s vers une source lumineuse mesuraient une vitesse de 4.10^8 m/s. Les équations de Maxwell ne permettaient pas d'introduire la vitesse relative. Elle précisait seulement que la vitesse de la lumière était $c=3.10^8$ m/s et donc l'existence d'un système de référence spécial dans lequel la lumière a cette vitesse. Michelson et Morley tentèrent de mesurer la vitesse de la terre en déterminant la variation de la vitesse de la lumière entre la direction du mouvement et la direction perpendiculaire, ceci grâce à un interféromètre, mais leur expérience échoua.

On réalisa que les équations de Maxwell n'obéissaient pas au principe de la relativité.

III. Les postulats d'Einstein :

Einstein conclut que les contradictions mises en évidence dans la théorie électromagnétique découlaient de la supposition de l'existence d'un espace absolu et qu'il fallait rejeter l'existence d'un tel espace. Il énonça deux postulats :

a) Premier postulat :

Les lois de la physique ont la même forme dans tous les systèmes de référence inertiels.

Ce premier postulat étendait le principe de la relativité newtonienne non seulement aux lois de la mécanique mais aussi au reste de la physique, y compris l'électricité et le magnétisme.

b) Deuxième postulat :

La lumière se propage dans le vide à une vitesse finie c indépendante de la vitesse de la source ou de l'observateur.

Ce deuxième postulat semble particulièrement difficile à admettre car il viole le sens commun. Il faut donc admettre qu'une personne en mouvement mesurerait la même vitesse qu'un observateur au repos. Ce qui est contraire à nos notions de tous les jours. En principe on devrait additionner la vitesse de la lumière à celle de l'observateur.

La difficulté vient du fait que dans l'expérience de tous les jours, nous ne mesurons jamais de vitesse approchant, même de loin, la vitesse de la lumière.

La théorie d'Einstein ne fut pas sans conséquences. Pour cerner les conséquences sans utiliser les calculs compliqués, nous allons utiliser les situations expérimentales très simples que Einstein appelait des expériences « gedanken ». Ce qui signifie en Allemand « expérience mentale ».

IV. La simultanéité

Un événement est un fait se produisant à un endroit donné et à un instant donné.

De façon immédiate deux événements sont considérés comme simultanés s'ils sont perçus au même instant. Mais une analyse correcte demande que l'on fasse la distinction entre l'émission d'un signal et sa réception par un observateur. Il s'agit en fait de deux événements et non d'un seul.

En physique newtonienne, l'information est supposée se transmettre instantanément, autrement dit à vitesse infinie. Ainsi, dès qu'un événement a lieu, l'ensemble de l'univers en est immédiatement informé. Donc, si une personne observe deux événements comme étant simultanés, toute personne les observera aussi comme simultanés. Il en est de même dans le cas de deux événements observés comme non-simultanés.

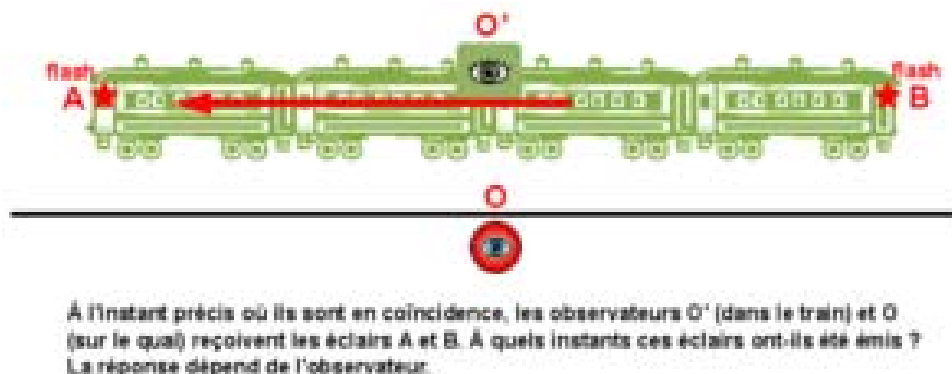


Figure IV-1 : Illustration de la relativité de la simultanéité

En théorie de la relativité, il en va autrement :

Dans un exemple inspiré par celui décrit par Einstein, relatif à un train, supposons qu'au moment précis où le milieu O' d'un train passe devant le point O situé sur la voie, les deux observateurs situés en O' (dans le train) et O (sur la voie) reçoivent deux signaux qui ont été émis aux deux extrémités A et B du train. A quels moments ont été émis les deux éclairs reçus au même moment au même point?

Les réponses sont différentes selon l'observateur considéré. L'observateur O' situé au centre du train, au repos par rapport aux points A et B et à la même distance de ces points, pourra affirmer que les éclairs ont parcouru la même distance et ont donc été émis au même instant. En revanche l'observateur situé sur la voie affirmera que l'un des éclairs a été émis avant l'autre en faisant le raisonnement suivant : « Les éclairs ont été émis avant que je les reçoive et donc avant que le milieu du train soit passé en face de moi. Par conséquent à l'émission l'avant du train était plus proche de moi que l'arrière et l'éclair qui en est issu a parcouru un trajet plus petit. Comme je reçois l'éclair A en même temps que l'éclair B c'est que le premier a été émis après le second. En résumé, pour moi, l'émission de l'éclair A est *postérieure* à celle de B. »

Conclusion : le temps n'est plus considéré comme une quantité absolue. La simultanéité des deux événements que constituent les émissions de signaux lumineux par A et B est relative au système de référence de chaque observateur.

V. La dilatation du temps et le paradoxe des jumeaux

a) La dilatation du temps

Réalisons l'expérience mentale d'Einstein suivante :

Un vaisseau spatiale voyage près de la terre a grande vitesse, on prend deux observateurs, l'un dans le vaisseau (figure V-a) et l'autre sur la terre (figure V-b). Les deux observateurs sont munis d'horloges exactes. L'observateur dans le vaisseau projette un faisceau de lumière sur un miroir de l'autre cote du vaisseau et mesure le temps pour faire aller et retour. Sachant que la lumière parcourt une distance de 2D à la vitesse c, ce temps qu'on va appeler Δt_0 est :

$$\Delta t_0 = \frac{2D}{c}$$

Ceci correspond à la mesure obtenue par l'observateur dans le vaisseau.

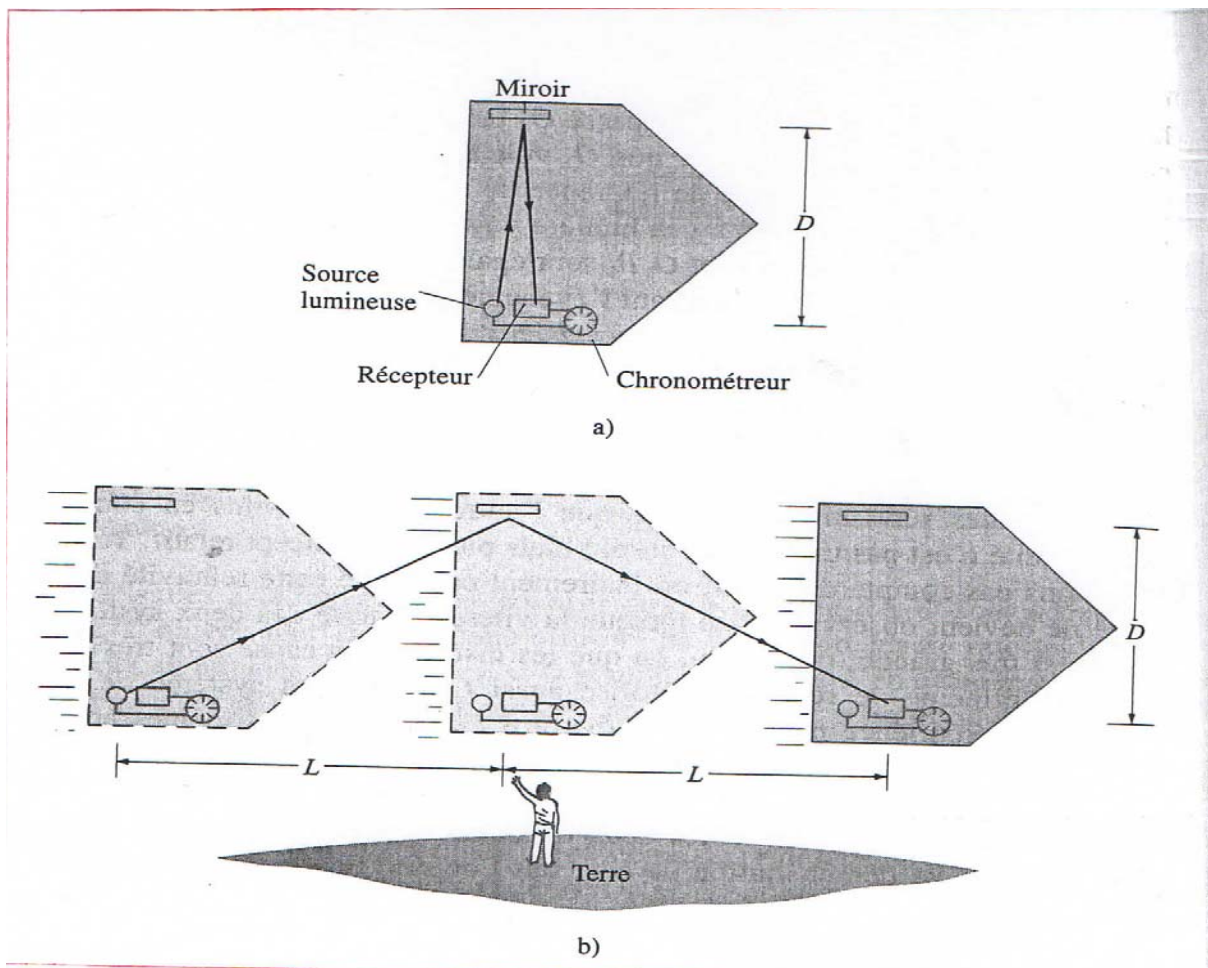


Figure V : Démonstration de la dilatation du temps

L'observateur terrestre observe le même aller et retour de la lumière, mais pour lui comme le faisceau bouge, la lumière doit parcourir le chemin diagonal (illustré sur la figure) pour faire cet aller et retour. Elle parcourt alors une plus grande distance bien que la vitesse de la lumière soit constante (2ème postulat). Le temps d'aller et retour mesure par l'observateur sur la terre est donc plus long que celui mesure par l'observateur dans le vaisseau. Appelons Δt , ce temps. Le vaisseau parcourt une distance $2L = v \cdot \Delta t$ où v est la vitesse du vaisseau. La distance totale parcourue par la lumière le long de son chemin diagonal est donc de $2\sqrt{D^2 + L^2}$ et par conséquent

$c = \frac{2\sqrt{D^2 + L^2}}{\Delta t} = \frac{2\sqrt{D^2 + v^2(\Delta t)^2/4}}{\Delta t}$ et élevant chaque membre au carré et en isolant Δt , on obtient :

$$c^2 = \frac{4D^2}{(\Delta t)^2} + v^2$$

$$\Delta t = \frac{2D}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Puis en combinant cette équation avec la valeur de Δt_0 , nous obtenons :

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (V - 1)$$

Comme $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ est toujours inférieur à 1, nous voyons que $\Delta t > \Delta t_0$. Autrement dit, le temps entre les deux événements (émission et réception) est plus grand pour l'observateur terrestre que pour celui dans le vaisseau : C'est la dilatation du temps selon laquelle *les horloges en mouvement avancent plus lentement que les horloges en repos*.

On peut donc conclure que le temps s'écoule plus lentement dans un système de référence en mouvement relativement au notre.

Le concept de la dilatation est difficile à admettre, car il contrevient aux évidences du sens commun. D'ailleurs d'après l'équation (V-1), l'effet de dilatation temporelle est négligeable, sauf si v approche c . Les vitesses dont nous faisons ordinairement l'expérience étant extrêmement plus petites que c , ce n'est donc pas surprenant que nous ne nous rendions pas compte de la dilatation du temps.

Des expériences sur les muons ont confirmé la dilatation. Il a en effet été prouvé que le muon dont la durée de vie au repos est de $2,2 \mu\text{s}$, vivait plus longtemps lorsqu'il voyageait à grande vitesse.

b) Le paradoxe des jumeaux

Le **paradoxe des jumeaux** est une expérience de pensée qui semble montrer que la relativité restreinte est contradictoire. Dans les ouvrages d'enseignement, il est mis en avant pour ses vertus pédagogiques et peut être l'occasion de se livrer à des calculs précis sur le ralentissement des horloges.

- Paradoxe :

Des frères jumeaux sont nés sur terre, par exemple Roméo et Romi. Roméo fait un voyage dans l'espace en fusée à une vitesse proche de celle de la lumière. D'après le phénomène de ralentissement des horloges en mouvement de la relativité restreinte, Romi qui est resté sur terre voit que Roméo qui voyage vieillit moins vite que lui. Mais Roméo qui voit aussi son frère s'éloigner à grande vitesse de lui affirme d'après le même phénomène, que Romi resté sur Terre vieillir moins vite que lui. Ainsi d'après ce raisonnement utilisant la relativité restreinte, chacun voit l'autre vieillir moins vite alors qu'en réalité, au retour Roméo, ils ne peuvent être tous les deux plus vieux que l'autre.

- Résolution :

Roméo effectue un aller-retour vers une planète située à 9 années-lumière de la terre. Il effectue son voyage aller et son voyage retour à la vitesse uniforme de $9/10$ de c .

Du point de vue de Romi : la durée du voyage est par définition de $2 \times 9 : (9/10) = 20$ ans. Alors que la durée mesurée par Roméo est $T_1 = 9 : 2,29 = 3,9$ ans. Ce qui veut dire pour Romi, que lorsque Roméo sera de retour, il aura vieilli de 20 ans et Roméo de 3,9 ans seulement.

Du point de vue de Roméo, le raisonnement serait le même et la situation sera à l'inverse, il y'a donc contradiction. En réalité, les deux situations ne sont pas symétriques, car Roméo pour faire son aller-retour utilise deux référentiels inertiels différents, tandis que Romi n'utilise qu'un seul. On ne peut donc pas faire le calcul dans le référentiel de Roméo car ce dernier n'est pas un seul et même référentiel d'inertie pendant toute la durée du voyage.

Cet effet a été mesuré à l'aide de deux horloges atomiques. Les résultats ont montré un très bon accord avec la théorie de la relativité restreinte.

VI. La contraction des longueurs

En relativité restreinte, la **contraction des longueurs** désigne la loi suivant laquelle la mesure de la longueur d'un objet en mouvement est diminuée par rapport à la mesure faite dans le référentiel où l'objet est immobile, du fait, notamment, de la relativité de la simultanéité d'un référentiel à l'autre. Voyons cela au moyen d'une expérience mentale.

Un observateur sur la terre observe une fusée allant à la vitesse v de la terre à Neptune. La distance entre les planètes mesurée par l'observateur sur la terre est de L_0 . Le temps requis pour le voyage, mesure dans le référentiel de la Terre, est de $\Delta t = L_0/v$ (VI-1). Considérons

maintenant la figure (VI) représentant le point de vue de l'observateur dans la fusée. Dans ce référentiel, la fusée est au repos, la Terre et Neptune bougent à une vitesse v (on négligera la vitesse relative entre la Terre et Neptune, car supposée beaucoup plus petite que v). En raison de la dilatation du temps, le temps entre le départ de la terre et l'arrivée sur Neptune est moindre selon l'astronaute que selon l'observateur terrestre. D'après l'équation (V-1), le temps requis pour le voyage selon l'astronaute est $\Delta t_0 = \Delta t \sqrt{1 - v^2/c^2}$ (VI-2). Comme l'astronaute mesure la

même vitesse mais moins de temps entre ces deux événements, sa mesure de la distance doit aussi être moindre. Soit L la distance entre les planètes du point de vue de l'astronaute, alors $L = v\Delta t_0$.

En utilisant (VI-1) et (VI-2), on obtient $L = v\Delta t_0 = v\Delta t \sqrt{1 - v^2/c^2} = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$ d'où $L = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$ (VI-3).

On peut alors conclure que la mesure de la longueur d'un corps en mouvement est plus petite que la mesure de la longueur de ce même corps au repos. Toutefois, seule la mesure de la longueur parallèle à la vitesse est *contractée*, les mesures perpendiculaires à la vitesse ne changent pas d'un référentiel à l'autre.

C'est le cas de la fusée de la figure VI-b, son diamètre n'a pas changé.

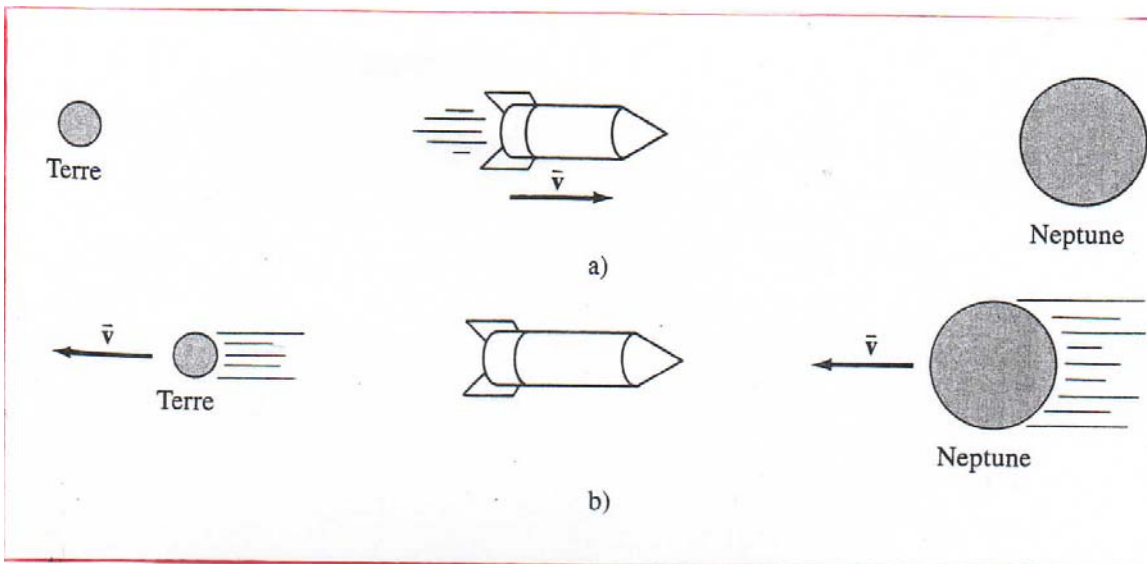


Figure VI : démonstration de la contraction de la longueur

VII. L'espace-temps a quatre dimensions

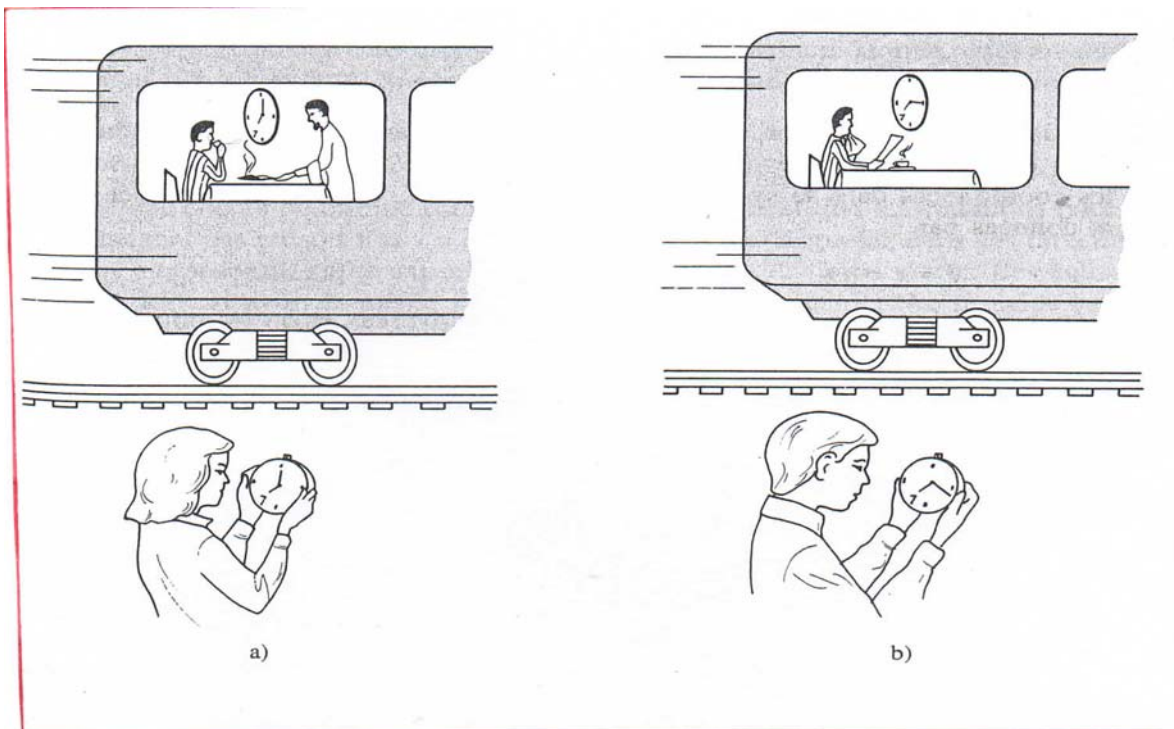


Figure VII

Un passager dans un train roulant à grande vitesse, supposons $0,65c$ (figure VII) commence son repas à 19h et le termine à 19h15, selon l'horloge du train. Comme les deux événements, soit le début et la fin du repas, se produisent au même point du train, le temps propre entre ces deux événements est de 15 minutes. Pour l'observateur au sol, le repas dure plus longtemps, soit 20 minutes selon l'équation (V-1). Supposons que le diamètre du plateau sur lequel le repas est servi

est de 20 cm. Pour l'observateur au sol, le plateau n'a que 15 cm de longueur (contraction des longueurs). Donc pour eux quoique la quantité de nourriture soit plus petite, il a l'impression que le repas dure plus longtemps.

En ce sens, la dilatation du temps et la contraction des longueurs se contrebalancent. Du point de vue de l'observateur au sol, le repas semble gagner en durée ce que la nourriture perd en quantité. L'espace ou la longueur est échangé pour le temps.

Ces considérations ont mené à l'idée de l'espace-temps à quatre dimensions, l'espace correspondant à trois dimensions et le temps à une quatrième dimension. Le temps et l'espace sont intimement inter reliés.

L'idée de quatre dimensions peut nous sembler étrange, mais elle provient du fait qu'il faut quatre quantités pour situer tout corps ou tout événement : trois pour décrire ou il se trouve dans l'espace et une pour dire ou il est dans le temps.

VIII. Les transformations de Galilée et de Lorentz

Nous allons maintenant voir comment relier certaines quantités dans un système de référence inertiel avec la quantité équivalente dans un autre système inertiel.

- *Point de vue classique ou Galiléen :*

Considérons deux systèmes de référence R et R' constitués chacun par un ensemble d'axes de coordonnées (figure VIII). Les axes x, y et z (non représentés ici) appartiennent à R, tandis que les axes x', y' et z' (non représentés ici) appartiennent à R'. Les axes x et x' sont colinéaires, et nous supposons que R' bouge vers la droite (dans la direction des x) à la vitesse de v relativement à R. par simplicité, on supposera que les origines O et O' des deux systèmes de références sont superposés au temps t = t' = 0.

Soit maintenant un événement se produisant en un point P représenté par les coordonnées x', y' et z' dans le système R' au temps t'. Quelles sont les coordonnées de P dans le système de référence R ? Comme initialement R et R' coïncident, après un temps t, R' aura parcouru une distance vt', par conséquent au temps t, $x = vt' + x'$. D'autre part, les coordonnées y et z ne sont

pas affectés par le mouvement le long de l'axe x et donc $y = y'$ et $z = z'$. Enfin, comme dans la physique newtonienne, on suppose que le temps est absolu, les horloges dans les deux systèmes indiqueront le même temps, de sorte que $t = t'$. Résumons tous ces résultats dans les équations de la transformation Galiléenne suivantes :

$$x = x' + vt', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t' \quad (\text{VIII-1})$$

Ces équations donnent les coordonnées d'un événement dans le système de référence R quand les coordonnées de l'événement dans le système R' sont connues. A l'inverse on peut aisément trouver les coordonnées dans le référentiel R' en fonction de celles dans le référentiel R :

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t$$

Si P est une particule en mouvement, cherchons les composantes du vecteur vitesse dans le référentiel R', soient u'_x, u'_y et u'_z . (on prend u pour faire la différence avec v). Or

$$u'_x = dx'/dt', \quad u'_y = dy'/dt', \quad u'_z = dz'/dt'$$

Dans le référentiel R, on a : u_x, u_y, u_z , en dérivant l'équation (VIII-1) par rapport à t, on aura :

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d(x' + vt')}{dt'} = u'_x + v, \quad u_y = u'_y, \quad u_z = u'_z \quad (\text{VIII} - 2)$$

Ces équations sont appelées les équations de la transformation galiléenne de la vitesse. Elles sont valables pour des vitesses inférieures à la vitesse de la lumière. Si on prend par exemple $u'_x = c$

alors $u_x = c + v$, ce qui est en contradiction avec la théorie de la relativité. Il apparaît donc qu'il

faut établir un nouvel ensemble d'équations de transformation pour les vitesses relativistes. On va les déduire de manière simple en nous référant à la même figure.

- *Point de vue relativiste*

Supposons que les transformations linéaires et de la forme :

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad y = y', \quad z = z'$$

Elles ne diffèrent des équations (VIII-1) que par le facteur qu'on va déterminer plus tard (pour y et z il n'y a pas de contraction de longueur). On ne supposera rien pour t, on la déduira plutôt. Les équations inverses ont la même forme :

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z$$

Comme une impulsion lumineuse émise à l'origine commune de R et de R' au temps $t = t' = 0$, après un temps t, aura parcouru sur l'axe x, une distance $x = ct$ ou $x' = ct'$. On obtient à

partir des équations pour x et x' que :

$$ct = \gamma(ct' + vt') = \gamma(c + v)t'$$

$$ct' = \gamma(ct - vt) = \gamma(c - v)t$$

En faisant le rapport des deux équations, t et t' sont éliminés et on obtient :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Maintenant que nous connaissons γ , il ne nous reste plus qu'à trouver la relation entre t et t' , pour cela combinons x et x' , ce qui va donner :

$$x' = \gamma(x - vt) = \gamma(\gamma[x' + vt'] - vt)$$

Et en isolant t , nous obtenons $t = \gamma(t' + vx'/c^2)$. En résumé,

$$x = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}(x' + vt'), \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) \quad (\text{VIII} - 3)$$

Ce sont les équations de la transformation de Lorentz établie en 1904 mais retrouvées un an plus tard indépendamment par Einstein dans le cadre de sa théorie de la relativité. On constate qu'elles ne diffèrent de la transformation classique que par les composantes x et t , et la dernière équation montre que le temps et l'espace sont interreliés.

Exemple : Démontrer la formule de la contraction des longueurs et de la dilatation du temps par la transformation de Lorentz.

En dérivant les équations de (VIII-3), on pourra obtenir les équations relativistes de la transformation des vitesses :

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}[\gamma(x' + vt')] = \frac{d}{dt'}[\gamma(x' + vt')] \frac{dt'}{dt} = \gamma \left[\frac{dx'}{dt'} + v \right] \frac{dt'}{dt}$$

Comme $dx'/dt' = u'_x$ et $dt'/dt = 1/(dt/dt') = 1/[\gamma(1 + vu'_x/c^2)]$ ou on a dérivé la dernière équation de (VIII-3) par rapport au temps, nous obtenons alors :

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + vu'_x/c^2} \quad (\text{VIII} - 4a)$$

$$u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + vu'_x/c^2} \quad (\text{VIII} - 4b)$$

$$u_z = \frac{u'_z \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + vu'_x/c^2} \quad (\text{VIII} - 4c)$$

Exemple : une fusée 2 est mise à feu depuis une fusée 1 avec une vitesse de $0,60c$. Quelle est la vitesse de la fusée 2 par rapport à la terre sachant que la fusée 1 a une vitesse de $0,60c$ relativement à la terre.

IX. La masse et la quantité de mouvement en mécanique relativiste :

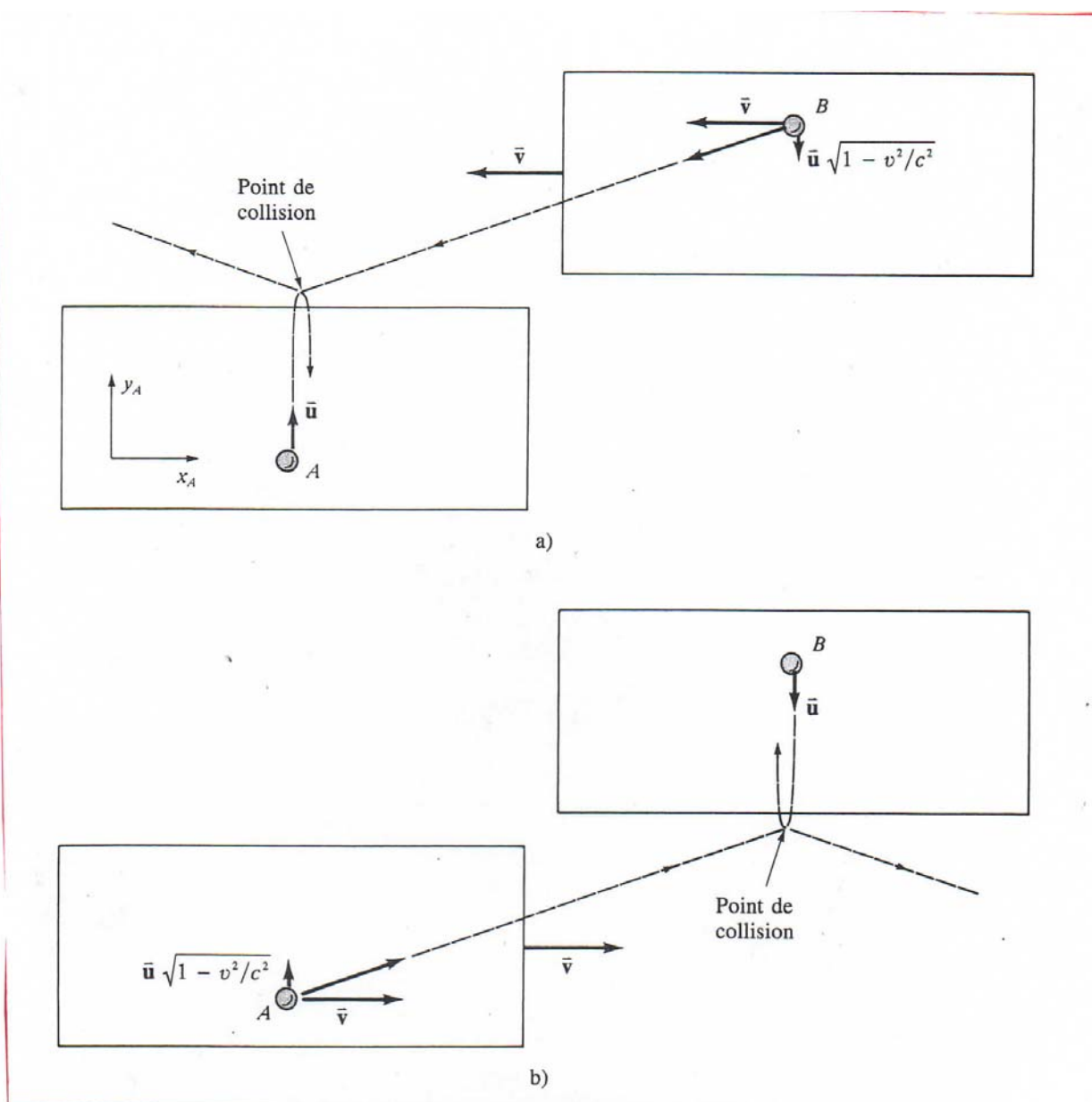


Figure IX : démonstration de la formule de masse : a) Collision vue de A ; b) collision vue de B

Après avoir montré que la longueur et le temps sont des quantités relativistes, on peut aussi supposer que la masse est aussi une quantité relativiste. En effet, Einstein montre la masse d'un corps augmente au fur et à mesure que sa vitesse augmente et que la masse relative est donnée par la formule :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (IX - 1)$$

où m_0 est la masse au repos (mesurée dans le référentiel où le corps est au repos) et m est la masse du référentiel par rapport auquel le corps est animé d'une vitesse v .

Nous allons démontrer par la loi de conservation de la quantité de mouvement que la relation (IX-1) est vérifiée. On va pour cela procéder à une expérience mentale. Supposons que la quantité de mouvement est donnée par : $\vec{p} = m\vec{v}$ qui est identique à la formule classique, mais nous poserons que m est une fonction de la vitesse $[m(v)]$.

Notre expérience mentale va porter sur la collision élastique entre deux balles identiques (même masse au repos) voyageant à la même vitesse v . Elles ont donc la même masse. Nous prenons deux référentiels inertiels A et B (Figure IX) se déplaçant à la vitesse v l'une relativement à l'autre. Une balle A voyage à la vitesse u dans le référentiel A parallèlement à y_A et perpendiculairement à v , une seconde balle B voyage dans le référentiel B à la vitesse u dans la direction y_B négatifs. Supposons que les deux balles rebondissent de façon élastique et que chacune lorsqu'elle est observée depuis le référentiel d'où elle a été lancée, rebondit alors à la vitesse u , dans la direction opposée à sa vitesse initiale. La figure a) montre l'observation depuis le référentiel A et la figure b), celle depuis le référentiel B. dans le référentiel A, la composante y de la vitesse de la balle A est $+u$ avant la collision et $-u$ après la collision. Dans le référentiel B, aussi bien avant qu'après la collision, la composante x de la vitesse de la balle A est v et sa composante y ($v'_x = 0$) est : $u\sqrt{1 - v^2/c^2}$, la même chose vaut pour la balle B mais à l'inverse. Supposons $u \ll v$ de sorte que la masse de la balle A puisse être vue du point de vue de B comme $m(v)$ et que la masse de la balle B puisse être vue du point de A comme $m(v)$.

Appliquons maintenant la loi de la conservation de la quantité de mouvement (la quantité de mouvement totale est la même avant et après la collision). En appliquant ceci à la composante y de la quantité de mouvement dans le référentiel A, on obtient :

$$m(u)u - m(v)u\sqrt{1 - v^2/c^2} = -m(u)u + m(v)u\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Puis en isolant $m(u)$, on obtient :

$$m(v) = \frac{m(u)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Si on choisit u très petit de telle sorte qu'il soit proche de zéro, on obtient :

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

La quantité de mouvement relativiste se définit donc de manière suivante :

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

La loi de conservation de la quantité de mouvement est donc valable en relativité. La seconde loi dans sa forme générale reste valide en relativité :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

Mais sa forme $\vec{F} = m\vec{a}$ n'est pas valide.

X. La vitesse limite

Une conséquence fondamentale de la théorie de la relativité est l'impossibilité qu'un corps quelconque acquière ou dépasse la vitesse de la lumière. L'équation de la quantité de mouvement montre que si v était égale à c , on aurait une quantité de mouvement infinie. Ce qui veut dire que pour accélérer un corps jusqu'à la vitesse $v = c$, il faudra une énergie infinie, ce qui est impossible. D'autre part, si v est plus grande que c , alors le facteur γ sera un nombre imaginaire et les

longueurs, le temps et la masse ne seront pas des réels. On conclut donc que les corps ordinaires ne peuvent pas égaler ou dépasser la vitesse de la lumière qui est considérée comme vitesse limite.

XI. $E=mc^2$, la masse et l'énergie

Lorsqu'on applique une force nette constante sur un corps dont la masse au repos est m_0 , la vitesse augmente, ce qui contribue à augmenter la masse. Comme la force agit sur certaine distance, le corps subit un travail et son énergie augmente. Ceci conduisit Einstein à la thèse qui constitue une idée cruciale de cette théorie, que la masse est une forme d'énergie. Pour trouver la relation mathématique entre la masse et l'énergie, nous allons admettre la validité du théorème de l'énergie cinétique en relativité et nous poserons que le mouvement est parallèle à l'axe x . le travail nécessaire pour augmenter la vitesse de 0 à v est :

$$W = \int_i^f F dx = \int_i^f \frac{dp}{dt} dx = \int_i^f \frac{dp}{dt} v dt = \int_i^f v dp$$

ou i et f se rapportent aux états initial ($v=0$) et final ($v=v$). Comme $d(pv) = p dv + v dp$ nous

pouvons écrire $v(dp) = d(pv) - p dv$ de sorte que $W = \int_i^f d(pv) - \int_i^f p dv$, l'intégration du

premier terme donne : $\int_i^f d(pv) = pv|_i^f = mv^2|_0^v = mv^2$, ou m est une fonction de v . par

conséquent, $W = mv^2 - \int_0^v mv dv = mv^2 - \int_0^v \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} dv$, l'intégration du second terme se fait

facilement puisque $\frac{d}{dv}(\sqrt{1-v^2/c^2}) = -(v/c^2)/\sqrt{1-v^2/c^2}$.

Donc $W = mv^2 + (m_0 c^2 \sqrt{1-v^2/c^2})|_0^v = mv^2 + m_0 c^2 \sqrt{1-v^2/c^2} - m_0 c^2$

$$= mv^2 + mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - m_0 c^2 = mc^2 - m_0 c^2$$

Finalement $W = mc^2 - m_0 c^2$ (XI - 1)

En vertu du théorème de l'énergie cinétique, l'énergie cinétique finale doit être égale au travail, par conséquent :

$$K = mc^2 - m_0 c^2$$

Où m est la masse de la particule voyageant à la vitesse v et m_0 sa masse au repos.

Clairement donc $K \neq mv^2/2$ à très grande vitesse, même si nous remplaçons m par $m(v)$ dans l'expression classique, le résultat n'est pas le même. Pour Einstein, $m_0 c^2$ est l'énergie au repos et mc^2 est l'énergie totale, ce qui permet d'écrire :

$$E = mc^2 = m_0 c^2 + K \quad (XI - 2)$$

Exemples :

- Un méson π^0 ($m_0 = 2,4 \times 10^{-28} \text{ Kg}$) voyage à la vitesse $v = 0,80c$. quelle est son énergie cinétique ? comparez le résultat à celui obtenu au moyen d'un calcul classique.
- Quelle est la quantité d'énergie produite par la désintégration du méson de l'exemple précédent.

L'équation (XI-2) peut encore s'écrire $K = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right)$ à basse vitesse, où $v \ll c$ on peut

utiliser le développement binomiale à l'ordre 1, ce qui donne $K \approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \dots - 1\right) \approx m_0 v^2/2$ et on trouve ainsi la formule classique.

Une relation existe aussi entre l'énergie totale et la quantité de mouvement p , elle est donnée par la formule : $E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4$

Conclusion

Les prédictions de la théorie de la relativité restreinte ont été mises à l'épreuve dans un grand nombre d'expériences, et on n'a pu trouver aucune contradiction entre les résultats de ces expériences et la théorie. La grande majorité des scientifiques ont alors accepté la théorie de la relativité comme une description exacte de la nature. L'une des plus grandes applications de nos jours est le système GPS.