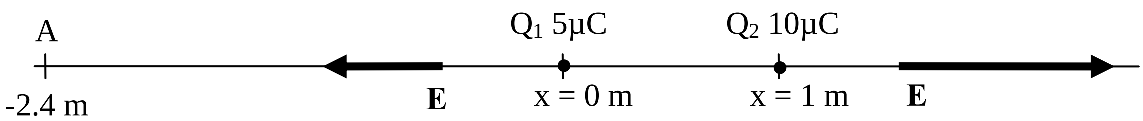
Corrigé des exercices de l'examen du 23 janvier 2007

(Les N° de page font référence au livre « Physique » de E. Hecht)

Q1. Deux charges ponctuelles de +5 µC et +10 µC se trouvent sur l'axe des x aux points des coordonnées x = 0 m et x = +1 m, respectivement.
a) Indiquer sur un dessin à échelle réduite la direction et le sens du champ électrique résultant sur l'axe des x pour x < 0 m et x > 1 m.
b) Calculer le point A sur l'axe des x où les champs crées par chacune des charges séparément sont identiques en module, direction et sens. Placer le point A approximativement sur votre dessin.
c) Calculer le potentiel électrique total en A.
d) Calculer le travail nécessaire pour amener une charge ponctuelle de +3 µC de l'infini au point A sans accélération.

a)



b) (p. 661) $E = k\frac{Q}{r^2}$; $E_1 = E_2$ donc $\frac{Q_1}{r_1^2} = \frac{Q_2}{r_2^2}$; $\frac{5\cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}}{r_1^2} = \frac{10^{-5}\,\mathrm{C}}{r_2^2}$ et $r_2^2 = 2\cdot r_1^2$

Les vecteurs champs sont de même sens si x > 1 ou x < 0

Si x > 1 : $r_1 = r_2 + 1$ donc $r_2^2 + 4r_2 + 2 = 0$ et $r_2 = (-2 \pm \sqrt{2})\mathrm{m}$: toujours négatif → impossible

Si x < 0 : $r_2 = r_1 + 1$ donc $r_1^2 - 2r_1 - 1 = 0$ et $r_1 = (1 \pm \sqrt{2})\mathrm{m}$ → solution positive : $r_1 = 2,41\,\mathrm{m}$

c) (p.693) $V = k\frac{Q_1}{r_1} + k\frac{Q_2}{r_2} = (9,0\times 10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2})(\frac{5\times 10^{-6}\,\mathrm{C}}{2,41\,\mathrm{m}} + \frac{10^{-5}\,\mathrm{C}}{3,41\,\mathrm{m}})$ → $V = 45,2\,\mathrm{kV}$

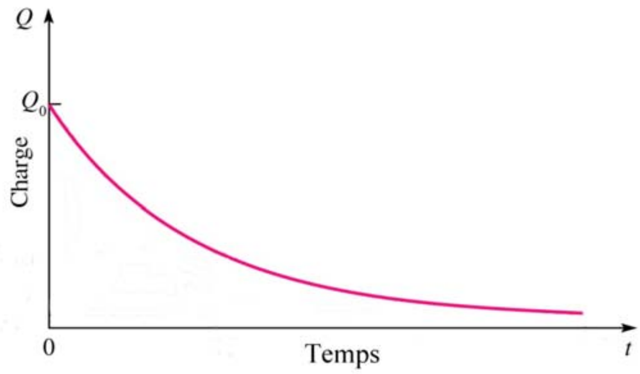
d) (p. 689) $W = \Delta V \bullet Q$. Potentiel nul à l'infini donc : $W = (45,2\times 10^3\,\mathrm{V})(3\times 10^{-6}\,\mathrm{C}) = 0,136\,\mathrm{J}$

Q2. Un fusible est un dispositif de sécurité composé d'un filament métallique mince de résistance *R* qui, pour des décharges électriques suffisamment élevées, commence à fondre au bout d'un temps caractéristique t_c. Pendant la décharge, le fusible reçoit une quantité d'énergie $W = \int_0^{t_c} P(t)dt$, où la puissance instantanée est donnée par la loi de Joule $P(t) = (I(t))^2 R$.

A l'Expérimentarium de l'ULB on illustre le fonctionnement d'un fusible en le soumettant à un courant qui résulte de la décharge d'un condensateur. Ce courant décroît exponentiellement suivant la loi $I(t) = I_0 e^{-t/T}$.

a) **Dessiner qualitativement la courbe décrivant la variation de la charge *Q* du condensateur en fonction du temps *t*.**
b) **Calculer t_c pour les valeurs typiques $W = 8\mathrm{x}10^{-4}$J, $R = 1\ \Omega$, $I_0 = 20$ A et $T = 10^{-5}$s.**
c) **Calculer la charge $Q(t_c)$ qui traverse le fusible jusqu'à ce qu'il commence à fondre à l'aide de la valeur numérique de t_c trouvée en b). Si vous n'avez pas réussi à résoudre b), donnez la formule théorique en fonction de t_c.**

a)



b) $P(t) = I^2(t)\cdot R = (I_0 e^{-\frac{t}{T}})^2 \cdot R = I_0^2 e^{-2\frac{t}{T}} \cdot R$ donc $W = I_0^2 R \int_0^{t_c} e^{-2\frac{t}{T}} dt = \frac{1}{2} I_0^2 RT \left[1 - e^{-2\frac{t_c}{T}}\right]$

donc

$$e^{-2\frac{t_c}{T}} = 1 - \frac{2W}{I_0^2 RT}$$

$$t_c = -\frac{T}{2} \ln\left(1 - \frac{2W}{I_0^2 RT}\right) = -\frac{10^{-5}\mathrm{s}}{2} \ln\left(1 - \frac{2(8\times10^{-4}\,\mathrm{J}}{(20\ \mathrm{A})^2 (1\,\Omega)(10^{-5}\mathrm{s})}\right) = 2{,}55\times10^{-6}\,\mathrm{s}$$

c)

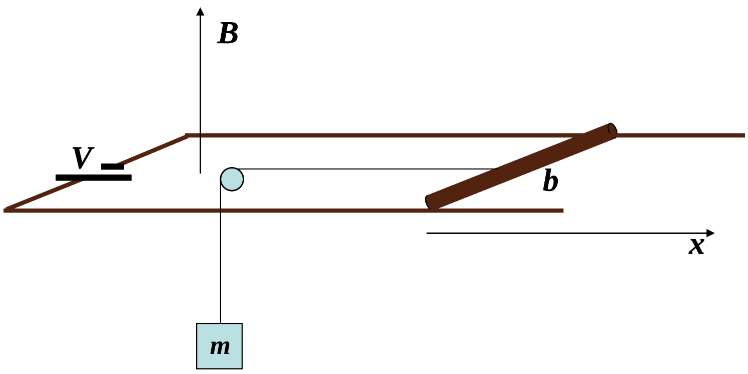
$$I(t) = \frac{dq}{dt} = I_0 e^{-\frac{t}{T}}$$

$$\int_0^{Q(t_c)} dq = I_0 \int_0^{t_c} e^{-\frac{t}{T}} dt$$

$$Q(t_c) = I_0 T \left[1 - e^{-\frac{t_c}{T}}\right] = (20\ \mathrm{A})\ (10^{-5}\mathrm{s}) \left[1 - e^{-\frac{2{,}55\times10^{-6}\,\mathrm{s}}{10^{-5}\,\mathrm{s}}}\right] = 4{,}5\times10^{-5}\,\mathrm{C}$$

Q3. Une barre de longueur *b* = 20 cm et de résistance *R* est posée sur 2 rails conducteurs de résistance négligeable, branchés à un générateur à courant continu (*V* = 6 V). La barre est liée à une masse *m* = 1,2 kg par une corde inextensible et une poulie de masse négligeable (voir dessin). Le système est soumis à un champ magnétique uniforme et constant, normal au plan des rails, d'intensité *B* = 1,5 T.

a) **Déterminer la valeur de la résistance *R* de la barre pour laquelle elle reste au repos.**
b) **Pour une autre valeur de la résistance *R*, la barre glisse sans frottement sur les rails. En supposant que son accélération devient rapidement négligeable, calculer la vitesse de la barre dans le cas où sa résistance *R* vaut 0,08 Ω.**
c) **Déterminer le courant *i* qui parcourt le circuit dans le cas b).**



a) Force magnétique s'exerçant sur la barre (p. 813): $F_M = ilB\sin\theta = ilB$ car ($B \perp$ barre)

Force de la pesanteur : $F_G = mg$

Equilibre : $F_M = F_G$ → $ilB = mg$ et $\frac{V}{R} = \frac{mg}{lB}$

$$R = \frac{VlB}{mg} = \frac{(6\,\text{V})\,(0,2\,\text{m})\,(1,5\,\text{T})}{(1,2\,\text{kg})\,(9,81\,\text{m/s}^2)} = 0,15\,\Omega$$

b) Barre en mouvement dans le champ magnétique → force électromotrice $\mathscr{E} = vBl$ (p. 839) qui s'oppose au potentiel V du générateur.

Accélération négligeable → force totale nulle → $F_M = F_G$ → $ilB = mg$; $i = \frac{V - \mathscr{E}}{R}$

$$\frac{V - \mathscr{E}}{R} = \frac{mg}{lB}$$

$$\mathscr{E} = vBl = V - \frac{Rmg}{lB}$$

$$v = \frac{V}{lB} - \frac{Rmg}{(lB)^2} = \frac{6\,\text{V}}{(0,2\,\text{m})(1,5\,\text{T})} - \frac{(0,08\,\Omega)(1,2\,\text{kg})(9,81\,\text{m/s}^2)}{((0,2\,\text{m})(1,5\,\text{T}))^2} = 9,54\,\text{m/s}$$

c) $$i = \frac{V - \mathscr{E}}{R} = \frac{V - vBl}{R} = \frac{(6\,\text{V}) - (9,54\,\text{m/s})(1,5\,\text{T})(0,2\,\text{m})}{0,08\,\Omega} = 39,2\,\text{A}$$

Q4. La figure ci-dessous montre une vue du haut de deux longs fils minces parallèles perpendiculaires au plan XY. Chacun d'eux est parcouru, dans des sens opposés, par un courant I.

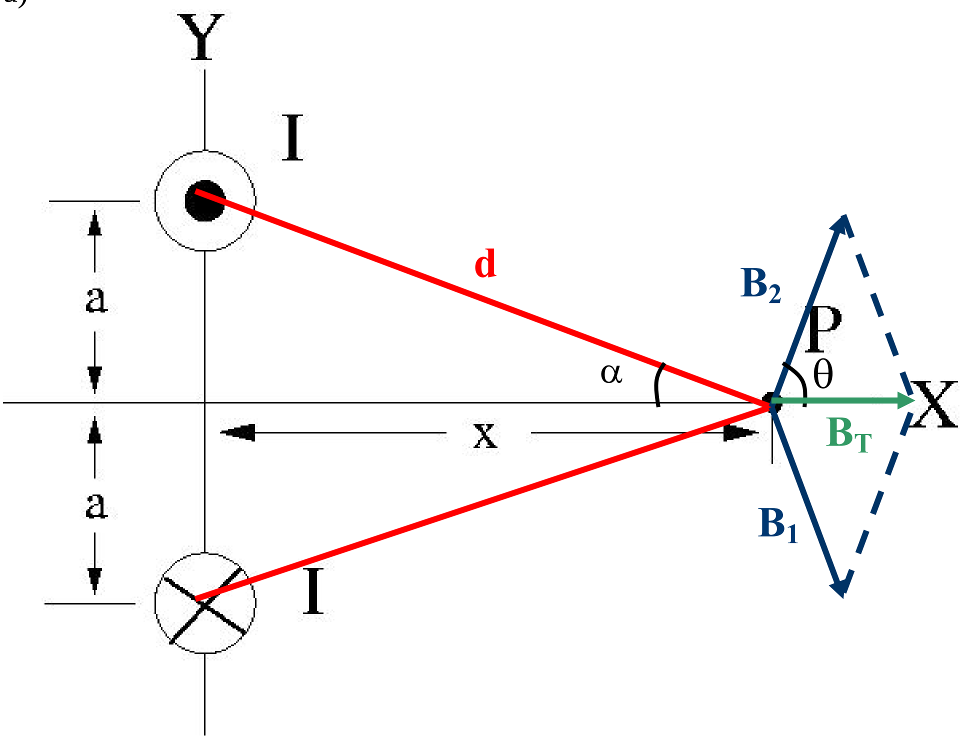
a) **Indiquer sur le dessin le champ magnétique produit par chaque fil au point P et le champ magnétique résultant $\vec{B_T}$.**

b) **Déduire l'expression pour le module du champ magnétique résultant $|\vec{B_T}|$ au point P en fonction de la distance a et de la coordonnée x.**

c) **Calculer la valeur de x pour laquelle le module $|\vec{B_T}|$ devient maximal.**

d) **Faire un dessin qualitatif de $|\vec{B_T}|$ en fonction de x.**

a)



b) Module du champ d'un long conducteur rectiligne (p.797) : $B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{d}$; $B_1 = B_2 = B$

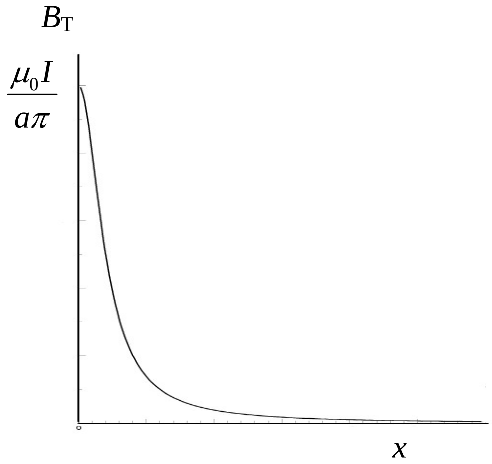
Composante y de la résultante nulle.

Composante x : $B_T = 2B\cos\theta = 2B\sin\alpha = 2B\frac{a}{d} = 2B\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$

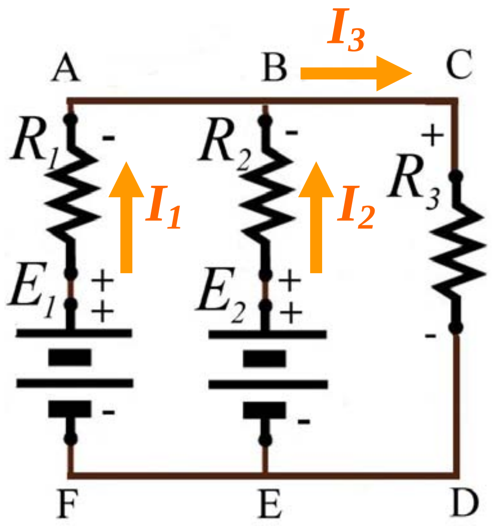
$$B_T = \frac{\mu_0 I}{\pi}\frac{a}{a^2+x^2}$$

c) $\frac{dB_T}{dx} = -\frac{\mu_0 I}{\pi}\frac{2ax}{(a^2+x^2)^2} = 0$ → maximum en $x = 0$

d)



Q5. Utiliser les lois de Kirchhoff pour déterminer les courants dans les trois résistances du circuit ci-dessous où $R_1 = R_2 = R_3 = 100\ \Omega$, $E_1 = 12$ V et $E_2 = 6$ V.



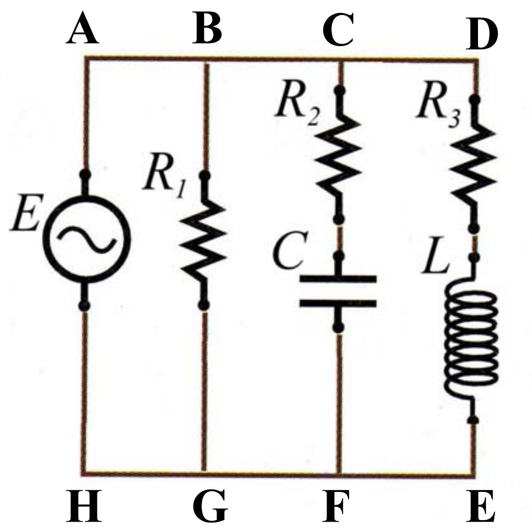
Nœud B : $I_3 = I_1 + I_2$

Maille ABEF : $12 - 100I_1 + 100I_2 - 6 = 0 \rightarrow 100I_1 - 100I_2 = 6$

Maille BCDE : $-100I_3 + 6 - 100I_2 = 0 \quad \rightarrow 100I_1 + 200I_2 = 6$

Résolution des deux dernières équations : $I_1 = 60$ mA ; $I_2 = 0$ A ; $I_3 = I_1 = 60$ mA

Q6. **Soit le circuit ci-dessous alimenté par une source de tension sinusoïdale E = (15 V) sin (ωt) (R_1 = 300 Ω; R_2 = 200 Ω; R_3 = 100 Ω; C = 10^{-3} F; L = 10^{-4} H).**
Que vaut le courant effectif débité par la source dans les deux cas particuliers suivant :
a) pour ω très petit ;
b) pour ω très grand.



Impédance branche CF : $Z_2 = \sqrt{R_2^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}$.

Si ω très petit, $Z_2 \approx \infty$; si ω très grand, $Z_2 \approx R_2$

Impédance branche DE : $Z_3 = \sqrt{R_3^2 + (L\omega)^2}$.

Si ω très petit, $Z_3 \approx R_3$; si ω très grand, $Z_3 \approx \infty$

NB. Ces impédances ne peuvent être combinées pour tout ω car le courant subit des déphasages différents dans chacune des branches.

Pour ω très petit, le circuit se réduit aux deux résistances R_1 et R_3 en parallèle (pas de déphasage).

Résistance totale : $R = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} = \frac{(300\ \Omega)\ (100\ \Omega)}{300\ \Omega + 100\ \Omega} = 75\ \Omega$

Courant maximum: $I_{\max} = \frac{V_{\max}}{R} = \frac{15\,\mathrm{V}}{75\,\Omega} = 200\,\mathrm{mA}$; Courant effectif : $I_{eff} = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{0,2\,\mathrm{A}}{1,414} = 141\,\mathrm{mA}$

Pour ω très grand, le circuit se réduit aux deux résistances R_1 et R_2 en parallèle (pas de déphasage).

Résistance totale: $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{(300\ \Omega)\ (200\ \Omega)}{300\ \Omega + 200\ \Omega} = 120\ \Omega$

Courant maximum: $I_{\max} = \frac{V_{\max}}{R} = \frac{15\,\mathrm{V}}{120\,\Omega} = 125\,\mathrm{mA}$; Courant effectif : $I_{eff} = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{0,125\,\mathrm{A}}{1,414} = 88,4\,\mathrm{mA}$