Manipulation M8: Ecoulement visqueux

1 But de la manipulation

- Détermination du coefficient de viscosité de l'eau.
- Evaluation du nombre de Reynolds critique pour un écoulement dans un tube cylindrique.

2 Introduction théorique

2.1 Viscosité

La notion de viscosité des fluides est similaire à celle de la friction entre corps solides. Considérons un fluide d'épaisseur L confiné entre deux plaques rigides de surface S (voir figure 1). On exerce sur la plaque supérieure une force horizontale constante F, tout en maintenant la plaque inférieure immobile par l'action d'une force appropriée opposée à F (non indiquée sur le dessin). La plaque supérieure accélère en entrainant le fluide avec elle.

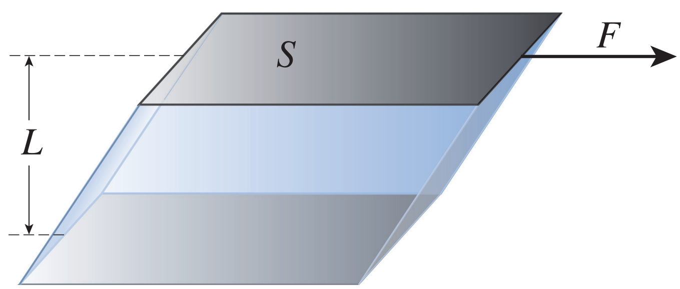

Figure 1: Fluide soumis à une force de cisaillement constante F.

De manière analogue à celle du glissement d'un solide sur un autre, le fluide développe une force de frottement, appelée *force de viscosité*, qui s'oppose au mouvement. Mais l'analogie s'arrête là. Contrairement à la force de frottement solide-solide, la force de frottement visqueuse augmente avec la vitesse de la plaque et finit par compenser exactement la force$F$. La plaque se meut alors à une vitesse limite constante v_{max}. L'expérience montre que la vitesse limite est proportionnelle à la force F ainsi qu'à l'épaisseur L du fluide,mais qu'elle est inversement proportionnelle à la surface de la plaque S, c.à. d. $v_{max} \sim FL/S$. On peut encore écrire cette relation sous la forme

$$F = \eta\, S\, \frac{v_{max}}{L} \tag{1}$$

Le coefficient de proportionnalité η s'appelle *le coefficient de viscosité*. Il s'exprime en Ns/m^2 dans le système international SI (l'unité CGS est *la poise*, égale à 0.1 Ns/m^2). A titre indicatif, sa valeur est de l'ordre de 10^{-5} Ns/m^2 pour les gaz et de 10^{-3} Ns/m^2 pour les liquides usuels, comme par exemple l'eau. Pour des liquides très visqueux (certaines huiles) elle peut atteindre 1 Ns/m^2. Notons également que la viscosité des liquides diminue sensiblement lorsque la température croÓt. Par exemple, la viscosité de l'eau à 15^o vaut $\eta \approx 1,137 \times 10^{-3}\, Ns/m^2$ et chute à $\eta \approx 0,891 \times 10^{-3}\, Ns/m^2$ à 25^o. Il est important de remarquer que la couche du fluide en contact immédiat avec la plaque en mouvement se meut pratiquement à la même vitesse que celle-ci, tandis que la couche en contact avec la plaque fixe est immobile. La vitesse du fluide n'est donc pas uniforme, mais varie en fonction de la profondeur. Ainsi, la force visqueuse ne s'exerce pas seulement entre le fluide et la plaque. Elle est également présente au sein du fluide et se manifeste dès qu'une région est en mouvement relatif par rapport à une autre.

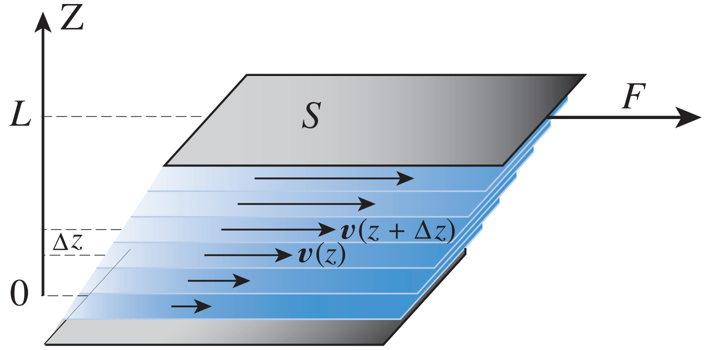

Figure 2: Ecoulement laminaire d'un fluide soumis à une force de cisaillement constante.

C'est Newton qui, le premier, donna une formulation quantitative de ce phénomène. Il proposa un modèle ou le fluide se comporte comme s'il était formé de "lames" minces qui se déplacent les unes par rapport aux autres (voir figure 2). Un écoulement qui obéit à ce critère est appelé *écoulement laminaire*. Considérons une couche centrée en z, de largeur Δz et de vitesse $v(z)$. Cette couche subit l'action de deux forces, dues aux mouvements relatifs des couches adjacentes situées en $z \pm \Delta z$. Celle en $z + \Delta z$ l'accélère (elle va plus vite) avec une force $F(z+\Delta z)$, tandis que celle en $z - \Delta z$ la freine (elle va moins vite) avec une force $-F(z-\Delta z)$ (le sens positif est celui du mouvement). Si l'écoulement est stationnaire, alors la vitesse $v(z)$ de la couche est constante et donc la résultante des forces qui lui sont appliquées est nulle, c.à. d. $F(z+\Delta z) = F(z - \Delta z)$. Comme ce résultat est indépendant du choix particulier de la coordonnée z et de la largeur Δz, la force entre couches adjacentes est nécessairement constante et vaut simplement(au signe près) la force F imprimée à la plaque supérieure. Nous pouvons donc appliquer la relation (1) au niveau de chaque couche. Ainsi, pour deux couches séparées d'une distance Δz et de vitesses respectives$v(z + \Delta z)$ et $v(z)$, on peut écrire :

$$\frac{F}{S} = \eta\, \frac{v(z + \Delta z) - v(z)}{\Delta z} \tag{2}$$

Cette relation reste vraie quelle que soit la largeur Δz de la couche, avec la restriction géométrique $z + \Delta z \leq L$ (voir figure 2). En particulier, on vérifiera que pour $z = 0$ et $\Delta z = L$ elle devient identique à la relation (1). Pour obtenir le profil de la vitesse, le plus simple est de transformer la relation (2) en une équation différentielle, en prenant la limite $\Delta z \to 0$. On obtient :

$$\sigma = \eta\, \frac{dv}{dz} \tag{3}$$

où nous avons introduit la grandeur σ, appelée *contrainte visqueuse*, définie comme le rapport de la force F par la surface S. La solution de cette équation s'écrit

$$v(z) = v_{max} \, \frac{z}{L} \tag{4}$$

où $v_{max} = \sigma L/\eta$ (cfr. relation (1), avec $\sigma = F/S$). La vitesse du fluide (en écoulement stationnaire) est donc une fonction linéaire de z. La loi de viscosité de Newton (3) est très bien vérifiée pour une grande classe de fluides, appelées *fluides newtoniens*, comme par exemple l'eau ou l'air. Pour ces fluides, la contrainte est proportionnelle au "gradient de vitesse" dv/dz ; le coefficient de viscosité est donc constant. De manière générale, un fluide est qualifié de newtonien lorsque sa viscosité est indépendante du gradient de vitesse. Mais il existe d'autres types de fluide pour lesquels la viscosité décroÓt ou au contraire croÓt avec le gradient de vitesse. Les premiers sont appelés "fluides rhéo-fluidifiants" (par exemple des suspensions colloÔdales, comme la mayonnaise) et les seconds "fluides rhéo-épaississants" (certains fluides micellaires). Par ailleurs, il faut savoir que la "contrainte" est une notion courante en physique des solides et en mécanique des fluides. Elle exprime le fait que lacomposante de la force parallèle à la surface (force de cisaillement) n'agit pas en un point, mais sur toute l'étendue de la surface de contact. Ainsi, la grandeur physique indépendante n'est ni la force, ni la surface de contact, mais bien le rapport des deux. Notons pour finir que nous avons dérivé la relation (3) pour le cas particulier d'un fluide en écoulement laminaire et stationnaire, illustré par la figure 2, suivant en cela la démarche originale de Newton. Un siècle après, Navier d'abord et Stokes ensuite, réussirent à dépasser ces restrictions et déivèrent ainsi laforme générale de l'équation du mouvement d'un fluide, connu sous le nom de l'équation de Navier-Stokes. Les détails de cette dérivation seront vus au cours.

2.2 Perte de charge, débit et nombre de Reynolds

Considérons un tube cylindrique dans lequel coule un liquide, comme par exemple un tuyau de canalisation d'eau. En régime laminaire, le fluide se comporte comme s'il était formé de feuillets cylindriques qui glissent les uns sur les autres en gardant leur individualité. La vitesse de l'écoulement est alors maximum au centre et pratiquement nulle aux parois du tube (voir figure 3). Cette variation spatiale de la vitesse fait apparaÓtre des forces visqueuses qui entraÓnent une dissipation d'énergie (cfr. la relation (3)). Pour maintenir l'écoulement, il faut donc compenser cette perte d'énergie par le travail de forces extérieures, comme par exemple la force de gravité (ch,teau d'eau). Dans la suite nous nous intéresserons à un écoulement dans un tube cylindrique horizontal de diamètre constant d et de longueur L. Un écoulement stationnaire (c.à.d indépendant du temps) n'est alors possible que s'il existe une différence de pression, $\Delta P = P_1 - P_2 > 0$, entre l'entrée et la sortie du tube. Cette différence de pression ΔP est appelée "*perte de charge*". La perte de charge compense très précisément la contrainte visqueuse (c.à.d la force de viscosité par unité de surface) développée par le liquide sur la longueur L.

Une question importante est la relation entre la perte de charge ΔP et le débit D du liquide à la sortie du tube. Le débit à travers une surface est défini comme le volume du liquide par unité de temps qui traverse cette surface. Dans un tuyau cylindrique de diamètre d, le débit est lié à la vitesse moyenne de l'écoulement, v_m, par la relation :

$$v_m = \frac{D}{\pi \, d^2/4} \tag{5}$$

Sur un plan intuitif, on s'attend à ce que la perte de charge soit proportionnelle à la longueur L du tuyau. Ce résultat est bien confirmé par l'expérience (pour autant que $L >> d$) qui

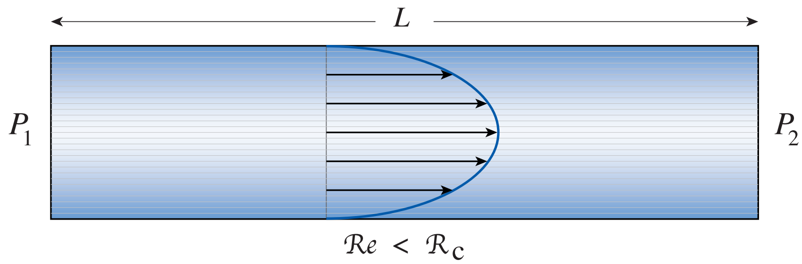

Figure 3: Ecoulement laminaire d'un liquide dans un tube horizontal.

montre cependant que le coefficient de proportionnalité dépend sensiblement des caractéristiques de l'écoulement. Le rapport $\Delta P/L$ ne peut alors dépendre que de quatre variables : la masse volumique ρ du liquide, le diamètre d du tube, le coefficient de viscosité η et la vitesse moyenne de l'écoulement v_m. Nous pouvons donc écrire

$$\Delta P/L = f(\rho, \eta, d, v_m) \tag{6}$$

A ce stade, tout ce que nous pouvons dire c'est que la fonction f a la même dimension que le rapport $\Delta P/L$, c.à.d. celle d'une masse par le carré d'une longueur et par le carré d'un temps. Cependant, les arguments de cette fonction ne sont pas des nombres mais des grandeurs physiques avec une dimension bien spécifique.

L'application de l'analyse dimensionelle à la relation (6) est particulièrement élégante et ses conclusions, qu'il vous est aisé de vérifier, sont les suivantes:

- Il existe une combinaison des quatre grandeurs physiques (ρ, η, d et v_m) qui est adimensionelle (n'a pas de dimension), soit

$$\mathcal{R}e = \frac{\rho\, v_m\, d}{\eta} \tag{7}$$

  qui est appelé *nombre de Reynolds.*

- La relation (7) permet d'exprimer un des arguments de la fonction $f(\rho, \eta, d, v_m)$ en termes des autres. En optant pour la vitesse v_m (c.à.d en considérant v_m comme une fonction deρ, η, d et $\mathcal{R}e$), on peut écrire la relation (6) sous la forme

$$\Delta P/L = f\Big(\rho, \eta, d, v_m(\rho, \eta, d, \mathcal{R}e)\Big) = \tilde{f}(\rho, \eta, d, \mathcal{R}e) \tag{8}$$

- Comme cette fonction $\tilde{f}$ ne dépend maintenant plus que de trois variables dimensionnées (ρ, η, et d), elle doit nécessairement être du type

$$\Delta P/L = \frac{\eta^2}{\rho\, d^3}\, \Phi(\mathcal{R}e) \tag{9}$$

  où

  - le rapport $\eta^2 / \rho\, d^3$ est la seule combinaison qui donne la dimension requise, soit une masse multipliée par le carré d'une longueur et par le carré d'un temps.

– la fonction Φ n'a pas de dimension. Elle représente un nombre dont la valeur dépend bien entendu des quatre variables ρ, η, d et v_m, mais pas de manière arbitraire. Ces variables doivent nécessairement apparaÓtre sous forme d'une combinaison particulière, celle donnée par la définition du nombre de Reynolds (7).

L'analyse dimensionnelle nous a ainsi permis de passer de la détermination d'une fonction à quatre variables (la fonction f introduite par la relation (6)), à celle d'une fonction $\Phi(\mathcal{R}e)$ qui ne dépend plus que d'une seule variable. Ce résultat est remarquable car il va permettre de concentrer le raisonnement sur la détermination de Φ. Cette fonction est loin d'être évidente à déduire sur le plan théorique, et nous allons donc analyser la relation (9) en nous limitant à deux cas particuliers, directement basés sur l'analyse de données expérimentales.

2.2.1 Cas du régime laminaire

Tout d'abord, il est clair que le débit doit augmenter avec la différence de pression ΔP entre l'entrée et la sortie du tube. Pour des écoulements laminaires, caractérisés par une vitesse moyenne relativement faible (inférieure à $20\,cm/s$ pour un tube de diamètre $d \approx 1\,cm$), l'expérience montre que le débit est tout simplement proportionnel à la perte de charge. Pour ce type d'écoulement nous pouvons donc raisonnablement admettre que $\Delta P \sim D$ (le symbole $\sim$désigne la proportionnalité). Comme $D \sim v_m$ et $v_m \sim \mathcal{R}e$ (cfr. relations (5) et(7)), on a $\Delta P \sim \mathcal{R}e$. Ce qui, d'après (9), implique $\Phi(\mathcal{R}e) \sim \mathcal{R}e$. D'où

$$\Delta P/L \sim \frac{\eta^2}{\rho\, d^3}\,\mathcal{R}e \sim \frac{\eta^2}{\rho\, d^3}\;\frac{\rho\, v_m\, d}{\eta} \sim \frac{\eta\, v_m}{d^2} \tag{10}$$

Le débit obéit donc à la relation

$$D = \frac{\pi}{4}\, d^2\, v_m \sim \frac{d^4}{\eta}\;\frac{\Delta P}{L} \tag{11}$$

La résolution analytique des équations hydrodynamiques donne :

$$D = \frac{\pi\, d^4}{128\,\eta}\;\frac{\Delta P}{L} \tag{12}$$

Cette relation est appelée *formule de Poiseuille*. Elle reste valable tant que le nombre de Reynolds (et donc la vitesse moyenne de l'écoulement) ne dépasse pas un certain seuil critique dont la valeur dépend de la nature du liquide ainsi que de la géométrie du système.

2.2.2 Cas du régime turbulent

Pour les "grands" nombres de Reynolds, l'écoulement revêt un caractère chaotique avec apparition spontanée de tourbillons qui brassent le système de part en part. On parle alors de l'écoulement "turbulent" (voir figure 4). Pour une canalisation d'eau parfaitement lisse et exempte de vibrations, la valeur critique R_c du nombre de Reynolds se situe aux alentours de $R_c \approx 2400$. Dans la pratique, comme celle des expériences au laboratoire, la turbulence apparaÓt à des valeurs de $\mathcal{R}e$ quelque peu inférieures.

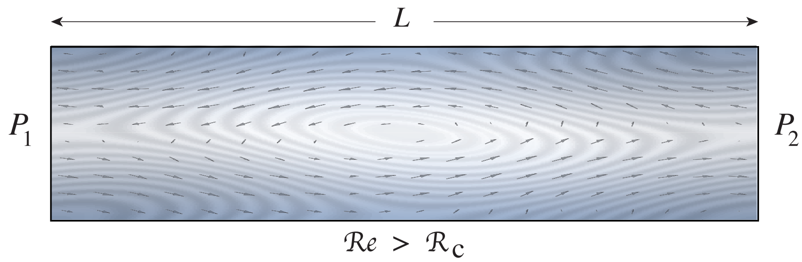

Figure 4: Ecoulement turbulent d'un liquide dans un tube horizontal.

La formation continuelle de tourbillons accapare une partie importante de l'énergie cinétique, laquelle est ensuite convertie en chaleur par la force visqueuse. En conséquence, en régime turbulent le débit croÓt beaucoup plus lentement avec ΔP qu'en régime laminaire. Ce résultat est schématiquement illustré par la figure 5 ci-dessous. Nous verrons plus loin comment on peut le vérifier expérimentalement. Par ailleurs, nous avons déjà rappelé que le problème est extrêmement complexe sur un plan théorique et qu'aucune solution générale n'est connue à ce jour. Il existe cependant un cas particulier lié à des régimes turbulents dits "développés", caractérisés par un nombre de Reynolds très grand ($> 10^5$). L'expérience montre que dans ce cas approximativement $\Phi(\mathcal{R}e) \sim \mathcal{R}e^2$. La relation (9) donne alors

$$\Delta P/L \sim \frac{\eta^2}{\rho\, d^3}\,\mathcal{R}e^2 \sim \frac{\eta^2}{\rho\, d^3}\left(\frac{\rho\, v_m\, d}{\eta}\right)^2 \sim \frac{\rho\, v_m^2}{d} \qquad (13)$$

avec

$$D = \frac{\pi}{4}\, d^2\, v_m \sim \sqrt{\Delta P} \qquad (14)$$

La vérification expéimentale de cette relation n'est pas simple et constitue même un sujet de recherche avancé ; en tout cas, l'appareillage mis à votre disposition ne permet pas de la réaliser.

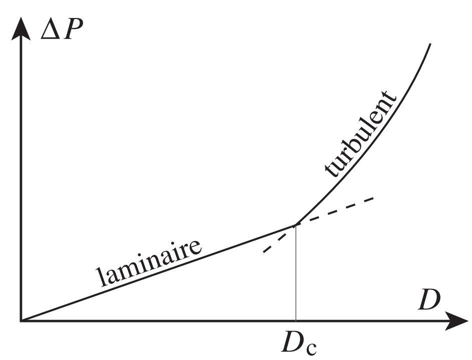

Figure 5: Perte de charge en fonction du débit.

3 Description de l'appareillage

L'appareillage, schématisé ci-dessous (figure 6), est constitué d'un bac B alimenté en eau distillée et équipé d'un trop-plein qui sert à maintenir le niveau d'eau constant durant toute la durée de

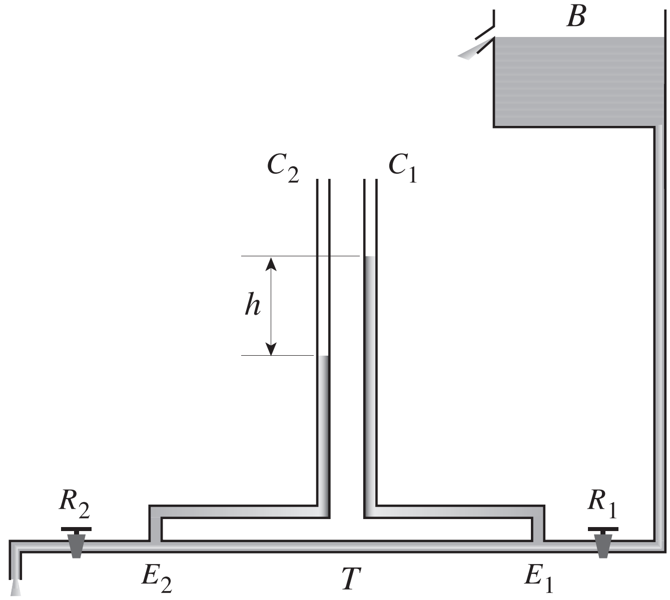

Figure 6: Appareillage.

la manipulation. Le bac B est relié à un tube calibré T. La perte de charge aux extrémités E_1 et E_2 de T est proportionnelle à la différence de niveau d'eau dans les deux colonnes verticales C_1 et C_2.

Les appareillages à disposition des étudiants différent légèrement les uns des autres sur la manière de régler la différence de pression à travers l'ajustement de la dénivellation h. Dans certaines configurations, illustrées sur la figure 6, deux robinets R_1 et R_2, sont situés respectivement en aval et en amont de T. Dans d'autres cas, le robinet R_2 est absent alors que la sortie est surrelevée, ce qui implique que la pression absolue à la sortie du tube est proche de la pression atmosphérique, mais en fait physiquement c'est en fait seule la quabtité h importe est relevante. Que le robinet R_1 soit présent ou non, il est recommandé de régler h (en fait implicitement le débit), à l'aide du robinet très maniable qui connecte en amont le réseau local à l'entrée du tube.

On détermine le débit D en mesurant à l'aide d'un balance la masse du volume d'eau écoulé (à $0,1\,g$ près) durant un intervalle de temps donné (à $0,2\,s$ près). La longueur du tube T et son diamètre sont indiqués sur chaque appareil ($L \approx 1\,m$ et $d \approx 1\,mm$).

4 Travail à effectuer

- L'assitant mettra le système en route: il faut laisser s'échapper un filet d'eau par le trop-plein durant toute la manipulation. Le robinet R_2 étant ouvert, ouvrir le robinet R_1 jusqu'à forcer l'eau à s'échapper des extrémités des colonnes C_1 et C_2, ceci afin de purger l'appareil de bulles d'air. La présence de bulles d'air fausse en effet les mesures de pression.

- Ajuster R_1 et R_2 (pour certains appareils, ajuster seulement R_1) pour obtenir une dénivellation $h \approx 10\,cm$ entre les deux colonnes C_1 etC_2. Pour mesurer le débit volumique D il faut recueillir l'eau sortant de R_2 dans un récipient durant un temps déterminé au chronomètre. Le débit s'obtient alors par le rapport entre le volume d'eau recueilli (estimé sur base de la masse d'eau mesurée et de la masse spécifique de l'eau) et l'intervalle de temps écoulé.

- Recommencer l'opération pour des valeurs de h voisines de 15, 20, 25, 35, 45, 60, 75, 90 cm. Entre deux opérations, il faut égoutter et sècher le récipient avec du papier absorbant (attention aussi à ne pas mettre d'eau sur la balance!). Pour avoir une précision convenable, les mesures de débit doivent porter sur une masse d'eau de $\approx 50\,g$ minimum et une durée d'au moins 120 secondes.

- Pour chaque valeur de h, exprimer le débit D et la perte de charge correspondante $\Delta P = \rho\, g\, h$ en unités du système international SI ($g = 9,81\, m\, s^{-2}$ et $\rho = 10^3\, kg\, m^{-3}$). Faire un graphique de ΔP en fonction de D et y localiser les régions laminaire et turbulente (cfr. figure 5). N'oubliez pas les barres d'erreurs associées au débit et à la perte de charge.

- La pente de la région laminaire permet de calculer le coefficient de viscosité η à partir de la formule de Poiseuille (12). Estimer l'erreur sur η et spécifier la température (moyenne) à laquelle se rapporte la mesure.

- Estimez le nombre de Reynolds maximal (cad le débit le plus grand) que vous avez étudié et comparez le au nombre de Reynolds critique.