Force de résistance visqueuse

1 But de la manipulation

- Etude du mouvement de chute d'une bille sphérique dans un liquide.
- Détermination du coefficient de viscosité du liquide par la formule de Stokes.

2 Introduction théorique

2.1 La loi de Stokes

Soit un corps solide en mouvement dans un fluide. Outre son poids et la poussée d'Archimède, le solide subit également une force de résistance F, développée par le fluide, qui s'oppose à son déplacement. Cette force dépend, d'une part, de la vitesse v et de la forme géométrique (aérodynamisme) du corps solide et, d'autre part, de la viscosité η et de la masse volumique ρ du fluide. Dans la suite nous nous intéresserons à un objet sphérique de rayon r. Il s'agit de trouver l'expression de la force F en termes de ρ, η, r et v :

$$F = f(\rho, \eta, r, v) \tag{1}$$

L'analyse dimensionnelle permet de simplifier quelque peu le problème. En procédant comme dans le cas de l'écoulement de Poiseuille (voir la manipulation "écoulement visqueux"), on trouve

$$F = \frac{\eta^2}{\rho}\,\phi(\mathcal{R}e) \tag{2}$$

où $\mathcal{R}e$ est le nombre de Reynolds, défini comme

$$\mathcal{R}e = \frac{\rho\,|v|\,r}{\eta} \tag{3}$$

La forme analytique de la fonction ϕ n'est pas connue dans le cas général. Sa détermination constitue un des grands défis de la physique mathématique moderne. Nous allons donc analyser la relation (2) en nous limitant au cas particulier d'un mouvement très lent, caractérisé par un nombre de Reynolds relativement faible.

Tout d'abord, il est clair que la force de résistance F développée par le fluide doit s'annuler à la limite $v \to 0$. Sur un plan intuitif on peut donc s'attendre à ce que F croisse proportionnellement à la vitesse tant que celle-ci reste relativement faible. L'expérience confirme ce résultat pour autant que le nombre de Reynolds reste inférieur à $0,5$. Comme $v \sim \mathcal{R}e$ (cfr. relation (3)), on a $F \sim \mathcal{R}e$. Ce qui, d'après (2), implique $\Phi(\mathcal{R}e) \sim \mathcal{R}e$. D'où

$$F \sim \frac{\eta^2}{\rho}\,\mathcal{R}e \sim \frac{\eta^2}{\rho}\,\frac{\rho\,v\,r}{\eta} \sim r\,\eta\,v \tag{4}$$

Par ailleurs, les équations hydrodynamiques peuvent être résolues perturbativement à la limite $\mathcal{R}e \to 0$. En première approximation, on trouve :

$$F = -6\pi r \eta v \tag{5}$$

Cette relation est appelée *formule de Stokes* (ou loi de Stokes). Elle reste valable tant que $\mathcal{R}e < 0,5$. Au delà de cette limite des tourbillons apparaissent dans le sillage de la sphère et la formule de Stokes (5) n'est plus applicable.

2.2 Chute d'une bille sphérique dans un fluide

Considérons une bille sphérique de masse m et de volume V en mouvement vertical (mouvement de chute) dans un fluide de viscosité η et de masse volumique ρ. Cette bille est soumise à l'action de trois forces : son poids $m\,g$, orienté vers le bas, la poussée d'Archimède $V\rho\,g$, dirigée vers le haut et la force de freinage F, opposée à la vitesse v (voir la figure ci-dessous). Tant que le nombre de Reynolds reste inférieur à 0.5, la loi de Stokes (5) reste valide et donc nous pouvons écrire :

$$m\frac{dv}{dt} = mg - V\rho\,g - 6\pi r \eta v \tag{6}$$

où nous avons orienté le sens positif du haut vers le bas.

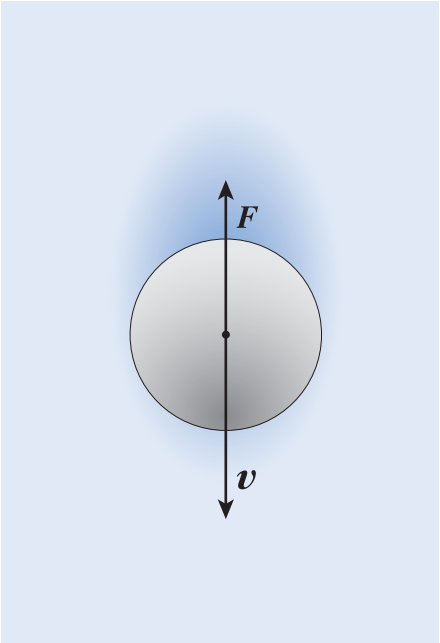

Figure 1: Chute d'une bille dans un fluide.

Soit ρ_B la masse volumique de la bille ($\rho_B > \rho$). En remarquant que $m = V\rho_B$, avec $V = 4\pi r^3/3$, on peut encore écrire la relation (6) sous la forme :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\rho_B - \rho}{\rho_B}\,g - \frac{9\,\eta}{2\,r^2\rho_B}\,v \tag{7}$$

Le deuxième membre de cette équation contient deux termes : une accélération constante positive et une accélération proportionnelle à la vitesse. Comme le sens de cette dernière accélération

est, à chaque instant, opposé à celui de la vitesse, l'accélération totale finira par s'annuler et ce, quelle que soit la vitesse initiale de la bille (orientée vers le haut ou vers le bas). Dès cet instant, la bille descendra avec une vitesse stationnaire v_{s} donnée par :

$$v_{\mathrm{s}} = \frac{2}{9}\, g\, \frac{(\rho_B - \rho)\, r^2}{\eta} \tag{8}$$

En remplaçant dans (7) la masse volumique ρ par son expression tirée de (8), on trouve

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v - v_{\mathrm{s}}}{\tau} \tag{9}$$

dont la solution s'écrit :

$$\frac{v(t) - v_{\mathrm{s}}}{v_0 - v_{\mathrm{s}}} = \mathrm{e}^{-t/\tau} \tag{10}$$

où v_0 est la vitesse de la bille à l'instant $t = 0$ et

$$\tau = \frac{2\, r^2\, \rho_B}{9\, \eta} \tag{11}$$

Cette grandeur τ a la dimension d'un temps. Elle représente le temps caractéristique de la relaxation de la vitesse v vers sa valeur stationnaire v_{s}. La bille atteindra donc d'autant plus rapidement sa vitesse stationnaire que le temps de relaxation est faible.

3 Description de l'appareillage

L'appareillage est constitué d'un tube de plus de $80\,cm$ de hauteur et de diamètre $d = 4,8\,cm$. Il est surmonté d'un entonnoir destiné à recevoir une bille d'acier et la guider dans sa chute. Du papier millimétré collé derrière le tube permet de repérer la position de la bille. Vous disposez de deux types de billes d'acier calibrées, de rayons respectifs $1,250 \pm 0,005\ mm$ et $1,500 \pm 0.005\ mm$; la masse volumique de l'acier $\rho_B = 7,80 \pm 0,05\ g/cm^3$. Le tube contient de l'huile synthétique de masse volumique $\rho = 0,870 \pm 0,005\ g/cm^3$. A titre indicatif, la viscosité est de l'ordre de $\eta \approx 0,4\, Ns/m^2$. Noter que l'accélération de pesanteur $g = 9,81\, m\, s^{-2}$.

4 Travail à effectuer

Vous aurez à déterminer la viscosité du liquide contenu dans le tube en mesurant la vitesse de la bille en régime stationnaire. Pour ce faire, il faut d'abord choisir deux repères h_1 et h_2 sur le papier millimétré, à environ $50\,cm$ l'un de l'autre. La vitesse stationnaire s'obtient alors en mesurant le temps nécessaire à la bille pour parcourir la distance entre h_1 et h_2.

Avant de démarrer l'expérience il faut s'assurer que la bille a atteint sa vitesse stationnaire au moment où elle croise le premier repère h_1. Commencer par estimer grossièrement, pour chaque type de bille, le temps de relaxation τ en vous basant sur la valeur indicative de la viscosité donnée plus haut. Faire ensuite un premier essai en laissant tomber une bille dans l'entonnoir et en mesurant au chronomètre le temps qu'elle mettra pour parcourir la distance entre la surface du liquide et le repère h_1. La vitesse stationnaire sera pratiquement atteinte si ce temps est au moins cinq fois supérieur au temps de relaxation τ. Le cas échéant, modifier la position de h_1.

4.1 Détermination de la viscosité

Laisser tomber une bille dans l'entonnoir et mesurer au chronomètre son temps de chute entre les repères h_1 et h_2. Pour éviter des erreurs de parallaxe, placer l'oeil au niveau du repère h_1 et, tout de suite après le passage de la bille, replacer l'oeil au niveau du repère h_2.

Faire trois mesures pour chaque type de bille et en déduire le temps moyen de chute t_{ch} ainsi que l'erreur associée. Calculer la vitesse stationnaire $v_\mathrm{s} = h/t_{ch}$, où h est la distance entre h_1 et h_2. La relation (8) permet alors de déduire la valeur de la viscosité η pour chaque type de bille :

$$\eta = \frac{2}{9}\, g\, \frac{(\rho_B - \rho)\, r^2}{v_\mathrm{s}} \tag{12}$$

Sachant que l'erreur maximum sur h est de l'ordre de $2\,mm$, estimer l'erreur expérimentale associée à η.

4.2 Concordance des valeurs de la viscosité

Il est probable que l'écart entre les valeurs de viscosité, associées à chaque type de bille, soit supérieur à la limite autorisée par l'erreur expérimentale. Deux explications sont possibles :

- Le nombre de Reynolds est trop élevé (voisin ou éventuellement supérieur à 0,5). Calculer d'abord $\mathcal{R}e$ pour chaque cas et vérifier qu'il est bien inférieur à 0,5. Mais même dans ce cas, des tourbillons éphémères peuvent se former aléatoirement dans le sillage de la bille. Ces tourbillons gênent l'écoulement du liquide autour de la bille et accentuent donc la force de freinage. On peut, dans une certaine mesure, en tenir compte en poussant l'analyse perturbative des équations hydrodynamiques un ordre plus loin. Un calcul relativement long donne :

  $$F = -\,6\,\pi\, r\, \eta\, v \left(1 + \frac{3}{8}\,\mathcal{R}e\right) \tag{13}$$

  Cette expression corrige quelque peu la formule de Stokes pour des nombres de Reynolds proches de $0,5$ mais perd sa validité dès que $\mathcal{R}e \approx 0,5$. Elle conduit à un terme correctif supplémentaire dans l'expression de la viscosité (12) :

  $$\eta = \frac{2}{9}\, g\, \frac{(\rho_B - \rho)\, r^2}{v_\mathrm{s}} - \frac{3}{8}\,\rho\, v_\mathrm{s}\, r \tag{14}$$

- La formule de Stokes (5) (ainsi que sa correction) est basée sur l'hypothèse que le liquide s'étend à l'infini dans toutes les directions. Le diamètre fini du tube peut donc jouer un rôle. En effet, la bille dans son mouvement de chute chasse le liquide devant elle qui ne peut alors s'évacuer qu'en remontant le long des parois du tube. Ce phénomène nécessite un apport supplémentaire d'énergie qui est fourni par le travail de la force de gravitation. Il en résulte un effet de freinage additionnel, d'autant plus important que le rapport r/R est grand ($R \approx 2,5\,cm$ est le rayon du tube). Le calcul de la force de freinage F en milieu fini (comme dans un tube) s'avère extrêmement complexe et constitue un des sujets de recherche important en mécanique des fluides et en aérodynamique (sous quelles conditions un hélicoptère peut-il décoller dans une cheminée ?). Dans la limite $r/R << 1$,

un calcul semi-empirique, basé en partie sur des résultats expérimentaux, conduit à un facteur correctif

$$\alpha = \left(1 - 2,1\ \frac{r}{R}\right) \tag{15}$$

La "bonne" valeur de la viscosité s'obtient alors en multipliant le résultat (14) par ce facteur α.

Calculer les nouvelles valeurs de la viscosité en tenant compte de ces corrections. Ces valeurs devraient être en accord l'une avec l'autre dans la limite des erreurs expérimentales. Présenter et commenter les conclusions.

4.3 Interaction hydrodynamique entre objets en mouvement dans un fluide

Laisser tomber presqu'en même temps deux billes de même calibre dans le tube. Descendent-elles à la même vitesse ? Il apparaît généralement que la deuxième bille tend à rattraper la première en profitant du sillage de celle-ci. Cet effet est exploité de nombreuses façons, comme par exemple le déplacement des poissons en bancs, le vol groupé d'oiseaux, les courses cyclistes ou automobiles (effet d'aspiration), etc. Essayer de donner une explication plausible de ce phénomène en demandant l'aide d'un assistant.

4.4 Travail complémentaire facultatif

Démontrer la relation (14).