Annexe 2

22-6 Un réseau en échelle

Nous aimerions considérer maintenant un circuit intéressant qui peut s'analyser au moyen de combinaisons en série et en parallèle. Supposons qu'on parte du circuit de la Fig. 22-18(a). On peut voir tout de suite que l'impédance de la borne a à la borne b est simplement $z_1 + z_2$. Prenons maintenant un circuit un peu plus difficile, celui que montre la Fig. 22-18(b). On pourrait analyser ce circuit en utilisant les lois de Kirchhoff mais il est aussi facile de se servir de combinaisons en série et en parallèle. On peut remplacer les deux impédances de l'extrémité droite par une impédance unique $z_3 = z_1 + z_2$ comme sur la partie (c) de la figure. Les deux impédances en parallèle z_2 et z_3 peuvent alors être remplacées par leur impédance équivalente z_4, comme le montre la partie (d) de la figure. Enfin z_1 et z_4 sont équivalentes à une impédance unique z_5 comme le montre la partie (e).

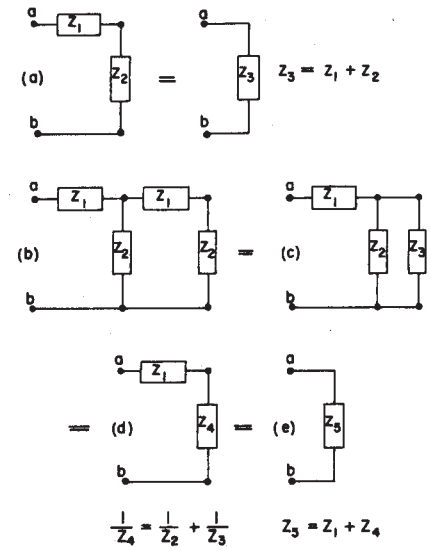

Fig. 22-18. L'impédance effective d'un réseau en échelle.

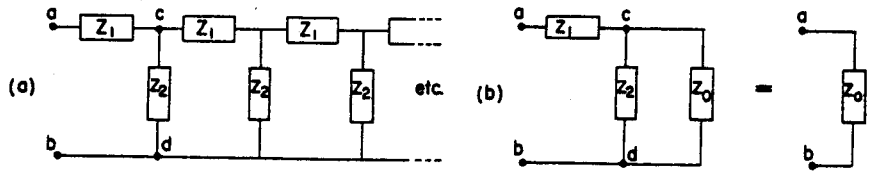

Fig. 22-19. L'impédance effective d'une échelle infinie.

On peut se poser maintenant une question amusante: qu'arriverait-il si dans le réseau de la Fig. 22-18(b) on continuait à ajouter d'autres échelons *indéfiniment* – comme l'indiquent les pointillés dans la Fig. 22-19(a)? Peut-on résoudre un tel réseau infini? Eh bien, ça n'est pas si difficile. D'abord, on remarque qu'un tel réseau infini est inchangé si on ajoute un échelon de plus «à l'avant». Si on ajoute un échelon de plus à un réseau infini on a bien sûr encore le même réseau infini. Soit z_0 l'impédance entre les deux bornes a et b du réseau infini; l'impédance de tout ce qui est à droite des deux bornes c et d est alors aussi z_0. Par conséquent, en ce qui concerne la partie avant, on peut représenter le réseau comme le montre la Fig. 22-19(b). En combinant les impédances parallèles $z_2 z_0$ et en ajoutant le résultat en série avec z_1, on peut écrire immédiatement l'impédance de cette combinaison:

$$z = z_1 + \frac{1}{(1/z_2) + (1/z_0)} \quad \text{ou} \quad z = z_1 + \frac{z_2 z_0}{z_2 + z_0}.$$

Mais cette impédance est aussi égale à z_0 de sorte qu'on a l'équation

$$z_0 = z_1 + \frac{z_2 z_0}{z_2 + z_0}.$$

On peut la résoudre en z_0 pour obtenir

$$z_0 = \frac{z_1}{2} + \sqrt{(z_1^2/4) + z_1 z_2}. \tag{22.27}$$

On a ainsi trouvé la solution pour l'impédance d'une échelle infinie d'impédances en série et en parallèle répétées. L'impédance z_0 est dite *impédance caractéristique* d'un tel réseau infini.

Considérons maintenant un exemple particulier dans lequel l'élément en série est une inductance L et l'élément shunt est une capacitance C, comme le montre la Fig. 22-20(a). On trouve dans ce cas l'impédance du réseau infini en posant $z_1 = i\omega L$ et $z_2 = 1/i\omega C$. Notez que le premier terme $z_1/2$, dans l'Eq. (22.27) est exactement la moitié de l'impédance du premier élément. Il paraîtrait donc plus naturel, ou du moins un peu plus simple, de représenter notre réseau infini comme sur la Fig. 22-20(b). En regardant le réseau infini depuis la borne a' on verrait l'impédance caractéristique

$$z_0 = \sqrt{(L/C) - (\omega^2 L^2/4)}. \tag{22.28}$$

Maintenant il existe deux cas intéressants, suivant la fréquence ω. Si ω^2 est inférieur à $4/LC$, le second terme sous le radical est inférieur au premier, et l'

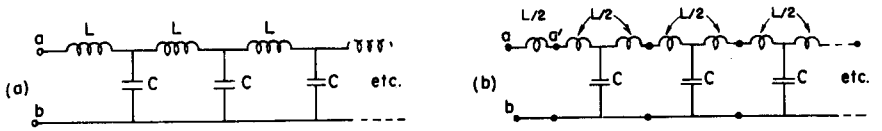

Fig. 22-20. Une échelle L-C représentée de deux façons différentes.

impédance z_0 est un nombre réel. D'autre part si ω^2 est plus grand que $4/LC$ l'impédance z_0 est un nombre imaginaire pur qu'on peut écrire

$$z_0 = i\sqrt{(\omega^2 L^2/4) - (L/C)}.$$

Nous avons dit précédemment qu'un circuit qui ne contient que des impédances imaginaires, telles que des inductances et des capacitances, a une impédance purement imaginaire. Comment se peut-il alors que pour le circuit que nous sommes en train d'étudier – qui n'a que des L et des C – l'impédance soit une résistance pure pour les fréquences inférieures à $\sqrt{4/LC}$? Pour les fréquences plus élevées, l'impédance est purement imaginaire, en accord avec notre proposition précédente. Pour les fréquences plus basses, l'impédance est une résistance pure et va par conséquent absorber de l'énergie. Mais comment un circuit peut-il absorber continuellement de l'énergie, comme une résistance, s'il n'est fait que d'inductances et de capacitances? *Réponse:* parce qu'il y a un nombre infini d'inductances et de capacitances, de sorte que lorsqu'une source est reliée à un circuit, elle fournit de l'énergie à la première inductance et à la première capacitance, puis aux secondes, aux troisièmes, et ainsi de suite. Dans un circuit de cette sorte, l'énergie du générateur est continuellement absorbée, venant à un taux constant et s'écoulant constamment dans le réseau, fournissant de l'énergie qui est emmagasinée dans les inductances et les capacitances le long de la ligne.

Cette idée suggère quelque chose d'intéressant au sujet de ce qui se passe dans le circuit. Nous devons nous attendre à ce que, si on relie une source à l'extrémité avant, les effets de cette source se propagent à travers le réseau vers l'extrémité à l'infini. La propagation des ondes le long de la ligne ressemble beaucoup au rayonnement d'une antenne qui absorbe de l'énergie à partir de la source qui l'alimente; c'est-à-dire qu'on s'attend à ce qu'une telle propagation se produise quand l'impédance est réelle, ce qui arrive si ω est inférieure à $\sqrt{4/LC}$. Mais quand l'impédance est imaginaire pure, ce qui arrive pour ω plus grande que $\sqrt{4/LC}$, on ne doit pas s'attendre à voir une telle propagation.

22-7 Filtres

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que le réseau infini en échelle de la Fig. 22-20 absorbe continuellement de l'énergie s'il est alimenté à une fréquence inférieure à une certaine fréquence critique $\sqrt{4/LC}$ que nous appellerons la *fréquence de coupure* ω_0. Nous avons suggéré que cet effet pouvait s'expliquer par un transport continuel d'énergie le long de la ligne. D'autre part, aux hautes fréquences, pour $\omega > \omega_0$, il n'y a pas absorption continuelle d'énergie, nous devons alors nous attendre à ce que les courants ne «pénètrent» pas très loin le long de la ligne. Voyons si ces idées sont justes.

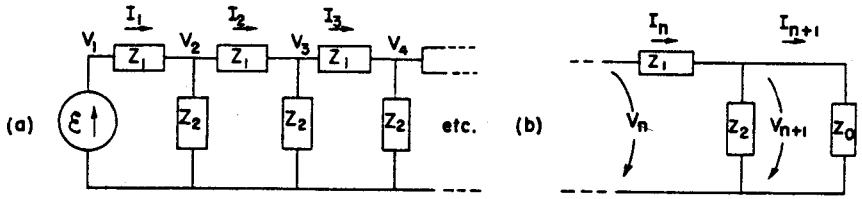

Fig. 22-21. Recherche du facteur de propagation d'une échelle.

Supposons que l'avant de l'échelle soit relié à un générateur alternatif et qu'on se demande de quoi a l'air la tension, disons, au 754 ième échelon. Comme le réseau est infini, ce qui arrive à la tension entre une section et la suivante est toujours la même chose; regardons par conséquent ce qui se passe quand on passe d'une section quelconque, disons la n ième, à la suivante. Nous définirons les courants I_n et les tensions V_n comme l'indique la Fig. 22-21 (a).

On peut obtenir la tension V_{n+1} à partir de V_n en se rappelant qu'on peut toujours remplacer le reste d'une échelle après le n ième échelon par son impédance caractéristique z_0; il n'y a donc plus qu'à analyser le circuit de la Fig. 22-21 (b). On remarque d'abord que toute V_n, comme elle s'exerce à travers z_0, doit être égale à $I_n z_0$. D'autre part, la différence entre V_n et V_{n+1} est $I_n z_1$:

$$V_n - V_{n+1} = I_n z_1 = V_n \frac{z_1}{z_0}.$$

on trouve donc le rapport

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = 1 - \frac{z_1}{z_0} = \frac{z_0 - z_1}{z_0}.$$

On peut appeler ce rapport le *facteur de propagation* pour une section de l'échelle; nous allons l'appeler a. Il est évidemment le même pour toutes les sections:

$$a = \frac{z_0 - z_1}{z_0}. \tag{22.29}$$

La tension après la n ième section est alors

$$V_n = a^n \mathcal{E}. \tag{22.30}$$

Vous pouvez maintenant trouver la tension après 754 échelons; c'est exactement a à la puissance 754 multiplié par $\mathcal{E}$.

Voyons donc de quoi a a l'air pour l'échelle L-C de la Fig. 22-20 (a). En utilisant z_0 tiré de l'Eq. (22.27) et $z_1 = i\omega L$, on obtient

$$a = \frac{\sqrt{(L/C) - (\omega^2 L^2/4)} - i(\omega L/2)}{\sqrt{(L/C) - (\omega^2 L^2/4)} + i(\omega L/2)}. \tag{22.31}$$

Si la fréquence d'alimentation est inférieure à la fréquence de coupure $\omega_0 = \sqrt{4/LC}$, le radical est réel, et les modules des nombres complexes du numérateur

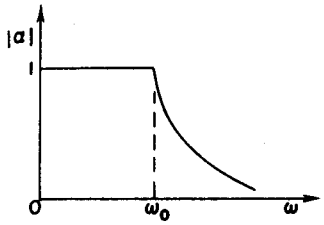

Fig. 22-22. Le facteur de propagation d'un échelon d'une échelle L-C.

et du dénominateur sont égaux. Le module de a est par conséquent égal à un; on peut écrire

$$a = e^{i\delta},$$

ce qui signifie que la valeur de la tension est la même dans toutes les sections; seule sa phase change. Le déphasage δ est, en fait, un nombre négatif et représente le «retard» que prend la tension en traversant le réseau.

Pour des fréquences supérieures à la fréquence de coupure ω_0 il vaut mieux simplifier par le facteur i du numérateur et du dénominateur de l'Eq. (22.31) et écrire

$$a = \frac{\sqrt{(\omega^2 L^2/4) - (L/C)} - (\omega L/2)}{\sqrt{(\omega^2 L^2/4) - (L/C)} + (\omega L/2)}. \tag{22.32}$$

Le facteur de propagation a est maintenant un nombre *réel* et *plus petit que un*. Cela signifie que le potentiel dans une section quelconque est toujours plus petit d'un facteur a que le potentiel dans la section précédente. Pour toute fréquence supérieure à ω_0, la tension s'évanouit rapidement le long du réseau. La valeur absolue de a en fonction de la fréquence est représentée par un graphe du genre de celui de la Fig. 22-22.

On voit que le comportement de a, tant au-dessus qu'au-dessous de ω_0, est en accord avec notre interprétation que le réseau propage l'énergie pour $\omega < \omega_0$ et la bloque pour $\omega > \omega_0$. On dit que le réseau «passe» les basses fréquences et «arrête» ou «filtre» les hautes fréquences. Tout réseau conçu pour que ses caractéristiques varient d'une façon donnée avec la fréquence est dit un «filtre». Nous venons d'analyser un «filtre passe-bas».

Vous vous demandez pourquoi toute cette discussion à propos d'un réseau infini qui manifestement ne peut pas réellement exister. La raison en est qu'on trouve les mêmes caractéristiques dans un réseau fini si on le ferme sur une impédance égale à son impédance caractéristique z_0. En pratique, il n'est pas possible de reproduire *exactement* l'impédance caractéristique avec quelques éléments simples – comme des R, des L et des C. Mais il est souvent possible d'y arriver avec une bonne approximation pour une certaine gamme de fréquences. On peut fabriquer de cette façon un filtre fini dont les propriétés sont très proches de celles trouvées dans le cas infini. L'échelle L-C par exemple a un comportement très voisin de celui que nous avons décrit si elle est fermée sur une résistance pure $R = \sqrt{L/C}$.

Si on échange, dans notre échelle L-C, les positions des L et des C pour en faire l'échelle de la Fig. 22-23 (a), on peut obtenir un filtre qui propage les *hautes* fré-

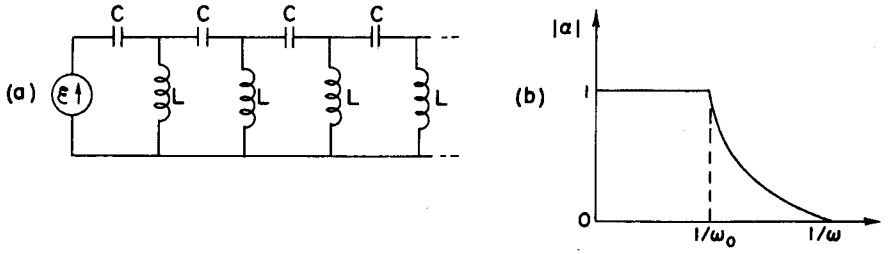

Fig. 22-23. (a) Filtre passe-haut; (b) son facteur de propagation en fonction de $1/\omega$.

quences et arrête les *basses* fréquences. Il est facile de voir ce qui se passe avec ce réseau en utilisant les résultats déjà obtenus. Notez que si on change un L en un C et *vice versa*, on change également chaque $i\omega$ en $1/i\omega$. Ainsi ce qui arrivait à ω avant, va arriver maintenant à $1/\omega$. On peut voir en particulier comment va varier a avec la fréquence à l'aide de la Fig. 22-22 en changeant la variable en abscisses en $1/\omega$, comme c'est fait sur la Fig. 22-23 (b).

Les filtres passe-bas et passe-haut qu'on a décrits ont diverses applications techniques. Un filtre L-C passe-bas est souvent utilisé comme filtre «lissant» dans une alimentation en courant continu. Si on veut obtenir une puissance continue à partir d'une source alternative, on commence par prendre un redresseur qui ne laisse passer le courant que dans une direction. A la sortie du redresseur on obtient une série d'impulsions qui ressemblent à la fonction $V(t)$ de la Fig. 22-24, ce qui est un courant continu plutôt moche parce qu'il tremblote. Supposons qu'on veuille un joli et pur courant continu, comme celui que fournit une pile. On peut s'en rapprocher en plaçant un filtre passe-bas entre le redresseur et l'utilisation.

On sait depuis le chapitre 50 du Vol. I que la fonction du temps de la Fig. 22-24 peut être représentée comme la superposition d'une tension continue plus une fonction sinusoïdale, plus une fonction sinusoïdale de fréquence plus grande, plus une fonction sinusoïdale de fréquence encore plus grande, etc. – par une série de Fourier. Si notre filtre est linéaire (si, comme on l'a supposé les L et les C ne varient ni avec les courants ni avec les tensions), ce qui sort du filtre est la superposition des sorties correspondant à chacune des composantes à l'entrée. Si on s'arrange pour que la fréquence de coupure ω_0 de notre filtre soit bien au-dessous de la plus basse fréquence contenue dans la fonction $V(t)$, le courant continu (pour lequel $\omega = 0$) traverse facilement, mais l'amplitude du premier harmonique sera un peu coupée. Et les amplitudes des harmoniques plus élevés seront encore plus coupées. On peut obtenir ainsi une sortie aussi lisse qu'on le souhaite, dans la seule limite du nombre de sections de filtre qu'on est prêt à acquérir.

On utilise un filtre passe-haut quand on veut éliminer certaines basses fréquences. Dans l'amplificateur d'un électrophone par exemple on peut utiliser un filtre passe-haut pour laisser passer la musique,

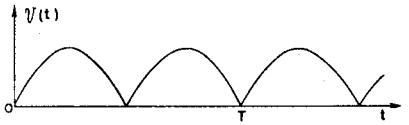

Fig. 22-24. La tension de sortie d'un redresseur double.

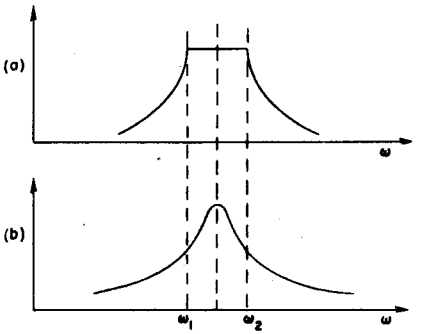

Fig. 22-25. (a) Filtre passe-bande. (b) Simple filtre résonnant.

tout en arrêtant le ronflement du moteur de la platine qui se situe dans les graves.

On peut aussi fabriquer des filtres «passe-bande» qui rejettent les fréquences inférieures à une certaine fréquence ω_1 et celles supérieures à une autre fréquence ω_2 (supérieure à ω_1) mais laissent passer les fréquences comprises entre ω_1 et ω_2. Cela peut se faire simplement en assemblant un filtre passe-haut et un filtre passe-bas, mais il est plus habituel de fabriquer une échelle dans laquelle les impédances z_1 et z_2 sont plus compliquées – chacune étant une combinaison de L et de C. Un tel filtre passe-bande peut avoir une constante de propagation du genre de celle de la Fig. 22-25(a). On peut s'en servir, par exemple, pour isoler des signaux qui n'occupent qu'un intervalle de fréquences, comme chacun des nombreux canaux d'un câble téléphonique haute-fréquence, ou la porteuse modulée d'une transmission radio.

On a vu au chapitre 25 du Vol. I qu'un tel filtrage peut se faire aussi en utilisant la sélectivité d'une courbe de résonance ordinaire, que nous avons tracée pour comparaison [Fig. 22-25 (b)]. Mais un filtre résonnant n'est pas aussi bon, dans certaines utilisations, qu'un filtre passe-bande. Rappelez-vous (chapitre 48, Vol. I) que lorsqu'une porteuse de fréquence ω_p est modulée avec un «signal» de fréquence ω_s, le signal résultant contient non seulement la fréquence porteuse mais aussi les deux fréquences latérales $\omega_p + \omega_s$ et $\omega_p - \omega_s$. Avec un filtre résonnant, ces fréquences latérales sont toujours quelque peu atténuées, et l'atténuation est d'autant plus grande que la fréquence du signal est plus grande comme vous pouvez le voir sur la figure. Il y a ainsi une «mauvaise réponse en fréquence». Les fréquences musicales les plus aiguës ne passent pas. Mais si on fait le filtrage avec un filtre passe-bande construit pour que la largeur $\omega_2 - \omega_1$ soit au moins le double de la plus haute fréquence contenue dans le signal, la réponse en fréquence sera «plate» pour les signaux voulus.

Nous voulons ajouter quelque chose au sujet du filtre échelle: l'échelle L-C de la Fig. 22-20 est également une représentation approximative d'une ligne de transmission. Si on a un long conducteur tendu parallèlement à un autre – tel un fil dans un cable coaxial ou un fil suspendu au-dessus du sol – il va y avoir une certaine capacitance entre les deux conducteurs et aussi une certaine inductance due au champ magnétique entre eux. Si on suppose la ligne découpée en petits morceaux de longueur $\Delta\ell$, chaque morceau va ressembler à un échelon de notre échelle L-C avec une inductance série ΔL et une capacitance shunt ΔC. Nous pouvons donc utiliser nos résultats sur le filtre échelle. Si on prend la limite pour $\Delta\ell$ tendant vers zéro, on a une bonne description de la ligne de transmission.

Remarquez que lorsque $\Delta\ell$ devient de plus en plus petit, ΔL et ΔC décroissent tous deux, mais dans les mêmes proportions, de sorte que le rapport $\Delta L/\Delta C$ reste constant. Donc si on prend la limite de l'Eq. (22.28) quand ΔL et ΔC tendent vers zéro, on trouve que l'impédance caractéristique z_0 est une résistance pure dont la valeur est $\sqrt{\Delta L/\Delta C}$. On peut aussi écrire le rapport $\Delta L/\Delta C$ sous la forme L_0/C_0, où L_0 et C_0 sont l'inductance et la capacitance par unité de longueur de la ligne; on a alors

$$z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}\,. \tag{22.33}$$

Vous remarquerez aussi que lorsque ΔL et ΔC tendent vers zéro, la fréquence de coupure $\omega_0 = \sqrt{4/LC}$ tend vers l'infini. Il n'y a pas de fréquence de coupure pour une ligne de transmission idéale.

22-8 Autres éléments de circuit

Nous n'avons défini jusqu'ici que des impédances idéales – l'inductance, la capacitance, et la résistance – de même qu'un générateur de tension idéal. Nous nous proposons maintenant de montrer que d'autres éléments, tels que des inductances mutuelles, ou des transistors, ou des tubes à vide, peuvent être décrits en utilisant uniquement les mêmes éléments de base. Supposons qu'on ait deux bobines et que, à dessein, ou autrement, du flux de l'une des bobines passe dans l'autre, comme dans la Fig. 22-26(a). Les deux bobines vont alors avoir une inductance mutuelle M telle que, quand le courant varie dans l'une des bobines, une tension soit créée dans l'autre. Peut-on tenir compte d'un tel effet dans nos circuits équivalents? On le peut de la façon suivante. Nous avons vu que la f.é.m. induite dans l'une des deux bobines en interaction peut s'écrire comme la somme de deux parties:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= -L_1\frac{dI_1}{dt} \pm M\frac{dI_2}{dt}\,, \\ \mathcal{E}_2 &= -L_2\frac{dI_2}{dt} \pm M\frac{dI_1}{dt}\,. \end{aligned} \tag{22.34}$$

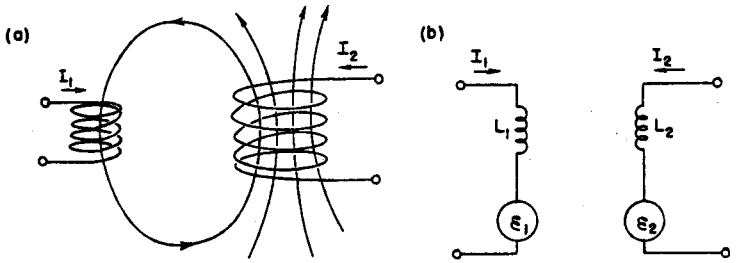

Fig. 22-26. Circuit équivalent à une inductance mutuelle.