Détermination numérique de l'erreur à l'approximation gaussienne

$$\log \mathcal{L}(\theta) = -\frac{1}{2}\frac{\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2}{\sigma_\theta^2} - \frac{1}{2}\log\left(2\pi\sigma_\theta^2\right)$$

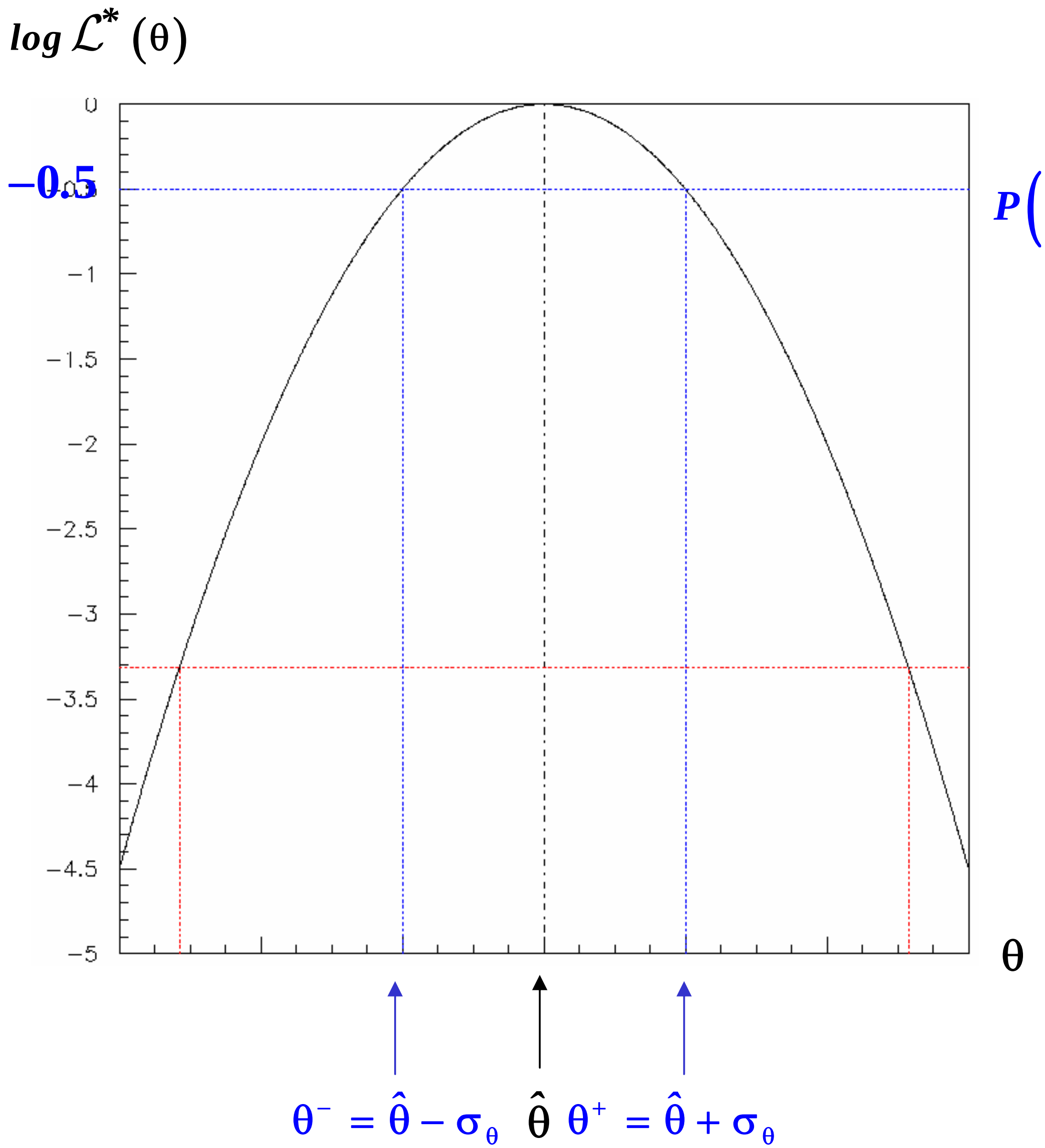
soit $\log \mathcal{L}^*(\theta) = \log \mathcal{L}(\theta) + \frac{1}{2}\log\left(2\pi\sigma_\theta^2\right)$

$\log \mathcal{L}^*(\theta)$ et $\log \mathcal{L}(\theta)$ identiques à une translation près : mêmes maximum et échelle

$\log \mathcal{L}^*(\theta) = -\frac{1}{2}\frac{\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2}{\sigma_\theta^2}$ parabole de maximum $\log \mathcal{L}^*\left(\hat{\theta}\right) = 0$

σ_θ tel que $\log \mathcal{L}^*\left(\theta = \hat{\theta} \pm \sigma_\theta\right) = -\frac{1}{2}$

Présentation du résultat: $\theta = \hat{\theta} \pm \sigma_\theta$



$$P\left(\theta_0 \in \left[\theta^- = \hat{\theta} - \sigma_\theta , \theta^+ = \hat{\theta} + \sigma_\theta\right]\right) = 0.683$$

Généralisation: détermination numérique d'un intervalle de confiance à l'approximation gaussienne

Intervalle $\left[\hat{\theta}-\Delta\theta_\alpha, \hat{\theta}+\Delta\theta_\alpha\right]$ **:intersection**

$$\begin{cases} \textbf{parabolle } \log \mathcal{L}^*(\theta) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2}{\sigma_\theta^2} \\ \textbf{horizontale } \log \mathcal{L}^*(\theta) = -\dfrac{r_\alpha^2}{2} \end{cases}$$

où est r_α **est le nombre d'écart type de la** $N(0,1)$ **tel que** $\alpha = \int_{-r_a}^{r_a} N(0,1)\,dx$

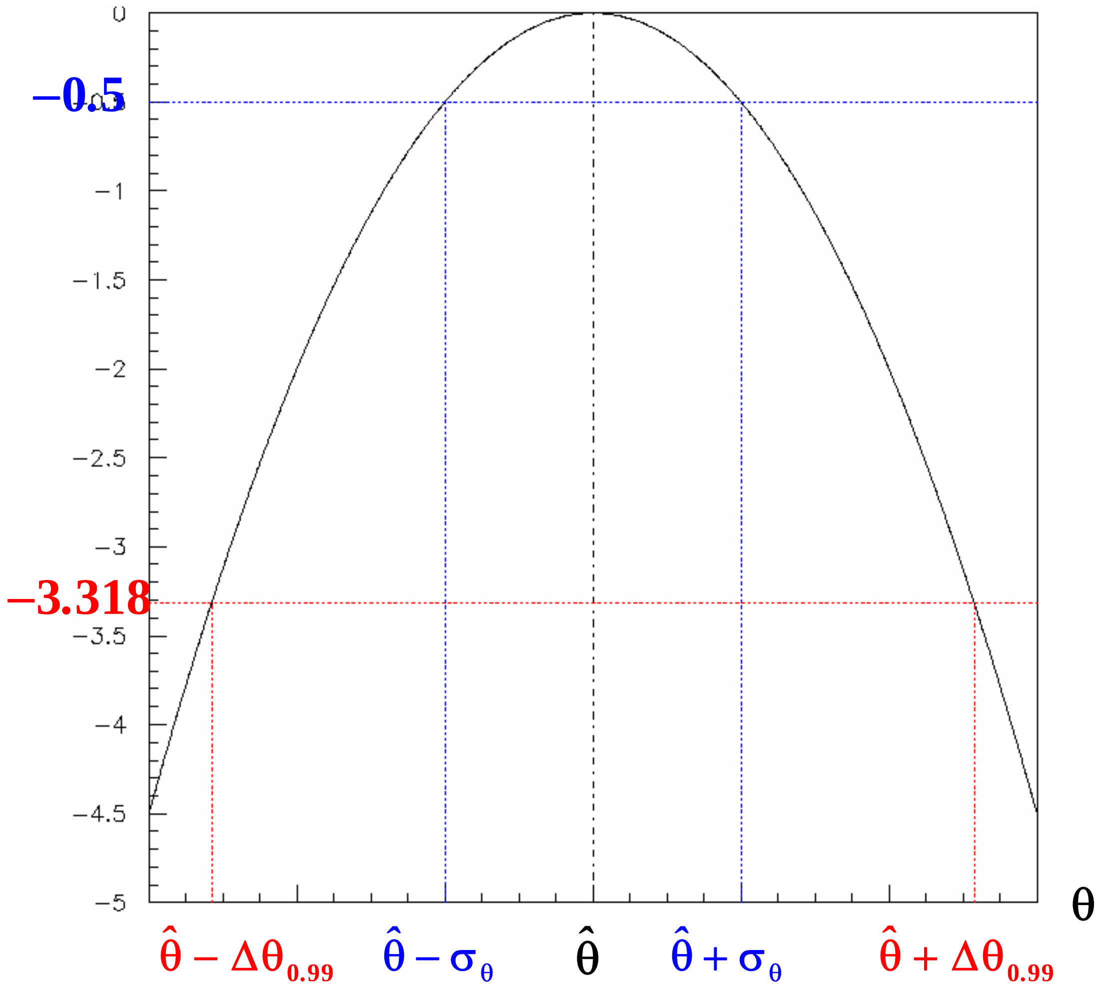
Notons que $\Delta\theta_\alpha = r_\alpha \sigma_\theta$
si on connait σ_θ**, on peut calculer** $\Delta\theta_\alpha$ **pour tout** α
sans disposer de $\log \mathcal{L}^*(\theta)$

$$\theta = \hat{\theta} \pm \Delta\theta_\alpha$$

au niveau de confiance α

α	r_a	$r_a*r_a/2$
0.683	1	0.5
0.900	1.645	1.34
0.950	1.960	1.92
0.990	2.576	3.33
0.999	3.290	5.41

$\log \mathcal{L}^*(\theta)$



$r_\alpha = 1 \qquad r_\alpha^2/2 = 0.5$

$$P\left(\theta_0 \in \left[\hat\theta - \sigma_\theta, \hat\theta + \sigma_\theta\right]\right) = 0.683$$

$$\alpha = 0.99 = \int_{-2.576}^{2.576} N(0,1)\,dx$$

$r_{0.99} = 2.576 \qquad r_{0.99}^2/2 = 3.318$

$$P\left(\theta_0 \in \left[\hat\theta - \Delta\theta_{0.99}, \hat\theta + \Delta\theta_{0.99}\right]\right) = 0.99$$

$$\Delta\theta_{0.99} = 2.576\ \sigma_\theta$$

Généralisation: détermination numérique de l'erreur et d'un intervalle de confiance pour les petits échantillons

n petit $\Rightarrow$ plus d'approximation normale $\Rightarrow$ $\log \mathcal{L}^*(\theta)$ n'est plus parabolique

Soit $\tau(\theta)$ une transformation univoque et réciproque $\Rightarrow$ $\log \mathcal{L}^*(\tau) = -\frac{1}{2}\frac{(\hat{\tau}-\tau)^2}{\sigma_\tau^2}$

σ_τ défini par intersection avec $\log \mathcal{L}^*(\tau) = -\frac{1}{2}$

Conservation de la probabilité et univocité et réciprocité de $\tau(\theta)$:

soit $\begin{cases} \tau_+ = \hat{\tau} + \sigma_\tau \quad \text{et} \quad \theta_+ = \tau^{-1}(\tau_+) \\ \tau_- = \hat{\tau} - \sigma_\tau \quad \text{et} \quad \theta_- = \tau^{-1}(\tau_-) \end{cases}$

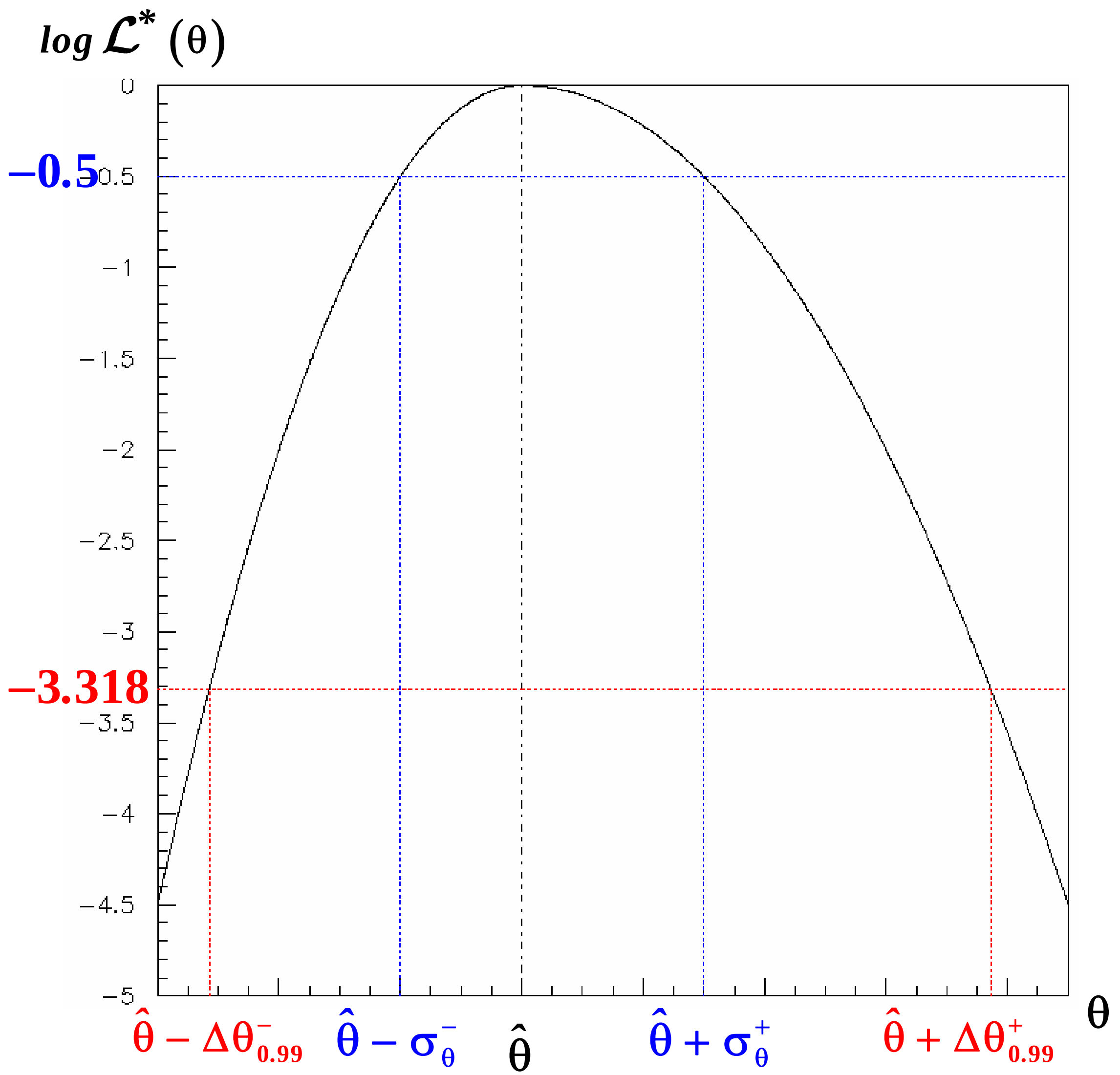
$\log \mathcal{L}^*(\tau_+) =$ $\quad \log \mathcal{L}^*(\theta_+) = -\frac{1}{2}\,, \quad \sigma_\theta^+ = \theta_+ - \hat{\theta}$

$\log \mathcal{L}^*(\tau_-) =$ $\quad \log \mathcal{L}^*(\theta_-) = -\frac{1}{2}\,, \quad \sigma_\theta^- = \theta_- - \hat{\theta}$

$P(\theta_0 \in [\theta_-, \theta_+]) = 0.683$

Résultat: $\theta = \hat{\theta}^{+\sigma_\theta^+}_{-\sigma_\theta^-}$

Les transformations $\tau(\theta)$ et $\theta(\tau)$ n'apparaissent pas explicitement dans le résultat et ne doivent donc pas être connues.



$r_\alpha = 1 \qquad r_\alpha^2/2 = 0.5$

$P\left(\theta_0 \in \left[\theta^-_{0.68}, \theta^+_{0.68}\right]\right) = 0.683$

$\sigma^+_\theta = \theta^+_{0.68} - \widehat{\theta}$

$\sigma^-_\theta = \theta^-_{0.68} - \widehat{\theta}$

$\alpha = 0.99 \quad = \int_{-2.576}^{2.576} N(0,1)\,dx$

$r_\alpha = 2.576 \qquad r_\alpha^2/2 = 3.318$

$P\left(\theta_0 \in \left[\theta^-_{0.99}, \theta^+_{0.99}\right]\right) = 0.99$

$\Delta\theta^+_{0.99} = \theta^+_{0.99} - \widehat{\theta}$

$\Delta\theta^-_{0.99} = \theta^-_{0.99} - \widehat{\theta}$

Résultat: $\theta = \hat{\theta}^{\Delta\theta^+_\alpha}_{\Delta\theta^-_\alpha}$

au niveau de confiance α

Exemple: détermination de la variance d'une gaussienne de moyenne connue

$\mu_0 = 0.$

$\underline{|1/\ \ n = 10000}$

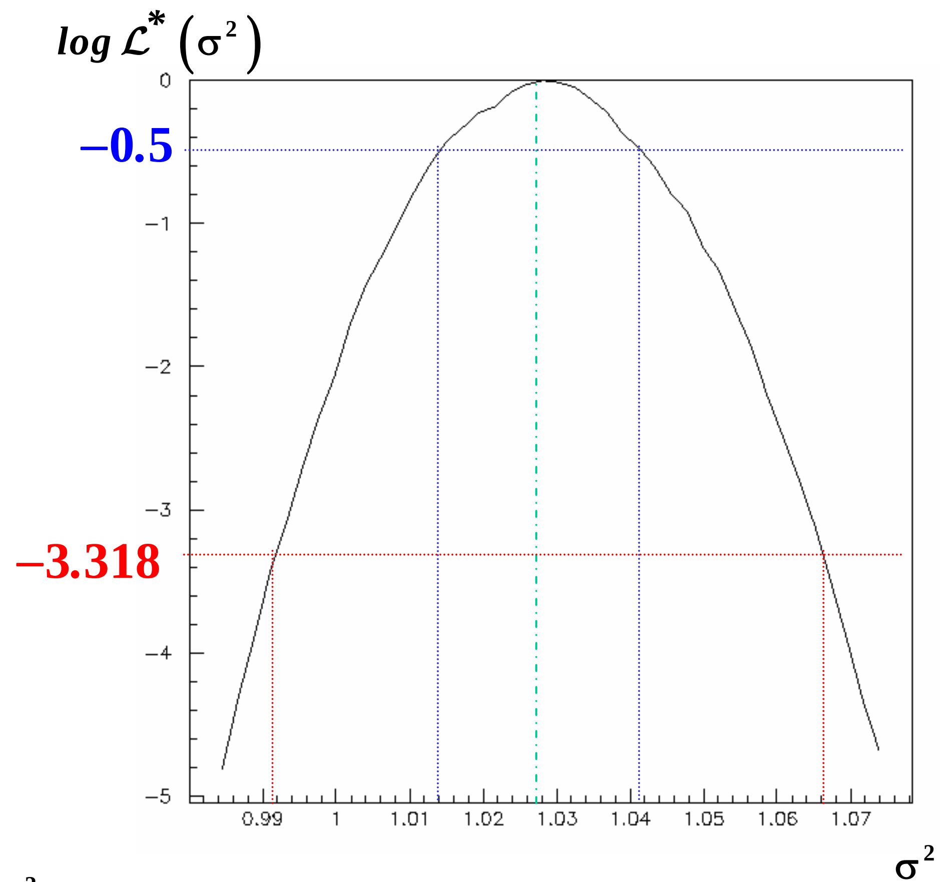
Résolution analytique:

$$\left.\begin{aligned}\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \\ \hat{\sigma}^2_{S^2} = \frac{2\hat{\sigma}^4}{n}\end{aligned}\right\}\sigma^2 = 1.028 \pm 0.014$$

Intervalle à 99% de confiance:

$1.028 \pm 2.576 \times 0.014 = 1.028 \pm 0.036$

Résolution graphique:



$\sigma^2 = 1.028 \pm 0.014$

Intervalle à 99% de confiance = 1.028 ± 0.036

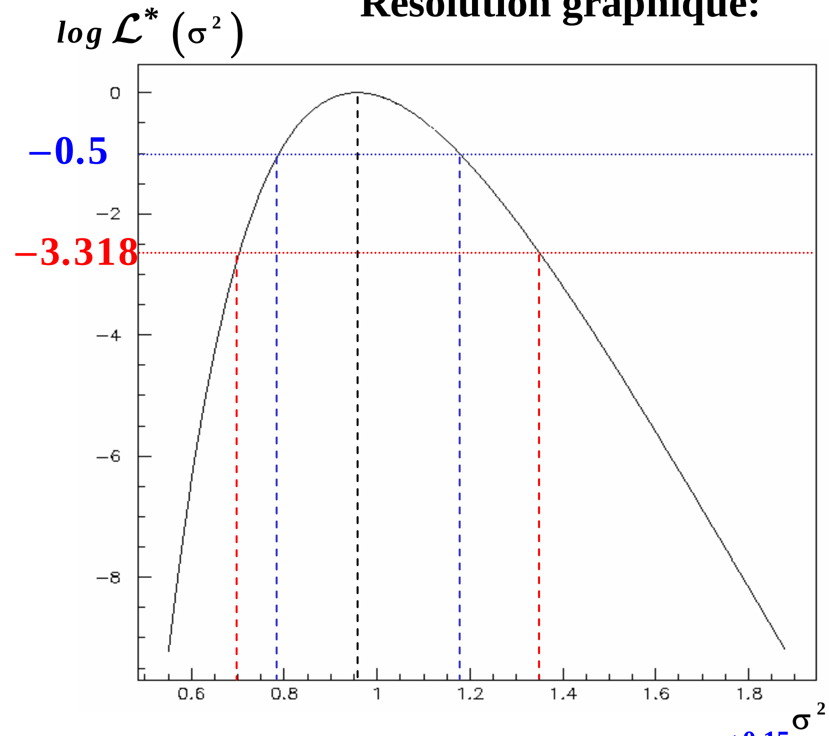
$2/\quad n = 100$

Résolution analytique:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{\sigma}^2 = S^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \\ \hat{\sigma}^2_{S^2} = \dfrac{2\hat{\sigma}^4}{n}\end{array}\right\}\sigma^2 = 0.96 \pm 0.14$$

mais $P\left(\sigma_0^2 \in \left[0.96-0.14, 0.96+0.14\right]\right) \neq 0.683$

Résolution graphique:



Intervalle à 68.3% de confiance = $0.96^{+0.15}_{-012}$

Intervalle à 99% de confiance = $0.96^{+0.46}_{-028}$

Note: $0.46 > 0.15 \times 2.58 = 0.39$

$0.28 < 0.12 \times 2.58 = 0.31$

L'intervalle correspondant à α_2 ne peut plus être calculé connaissant l'intervalle correspondant à α_1, mais il faut connaitre $\log \mathcal{L}^*(\theta)$

Généralisation: détermination graphique de l'erreur et d'un domaine de confiance pour deux paramètres indépendants à l'approximation gaussienne

Distribution binormale de deux variables indépendantes

$$f\left(x_1,x_2\right)=\frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\left(x_1-\mu_1\right)^2}{\sigma_1^2}+\frac{\left(x_2-\mu_2\right)^2}{\sigma_2^2}\right)}$$

Fonction de vraisemblance de deux variables indépendantes θ_1,θ_2

approximation gaussienne : $n\to\infty$

$$\mathcal{L}\left(\theta_1,\theta_2 \mid \hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2\right)=\frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\left(\theta_1-\hat{\theta}_1\right)^2}{\sigma_1^2}+\frac{\left(\theta_2-\hat{\theta}_2\right)^2}{\sigma_2^2}\right)}$$

$$\log\mathcal{L}\left(\theta_1,\theta_2\right)=-\frac{1}{2}\sum_{i=1,}^{2}\frac{\left(\theta_i-\hat{\theta}_i\right)^2}{\sigma_i^2}+Cste$$

$$\log\mathcal{L}^*\left(\theta_1,\theta_2\right)=\log\mathcal{L}\left(\theta_1,\theta_2\right)-Cste$$

$$\hat{\theta}_i \Rightarrow \frac{\partial\log\mathcal{L}^*\left(\theta_1,\theta_2\right)}{\partial\theta_i}=0$$

Définition du domaine de confiance pour niveau de confiance α

$$\log \mathcal{L}^*(\theta_1,\theta_2) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1,}^{2}\frac{\left(\theta_i - \hat{\theta}_i\right)^2}{\sigma_i^2} \quad \textbf{paraboloïde centré sur } \left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2\right)$$

$$-2\log \mathcal{L}^*(\theta_1,\theta_2) = \sum_{i=1,}^{2}\frac{\left(\theta_i - \hat{\theta}_i\right)^2}{\sigma_i^2} : \quad \chi_2^2 \textbf{ par définition}$$

$$r_\alpha^2 \textbf{ tel que } \int_0^{r_\alpha^2} \chi_2^2\left(r^2\right) dr^2 = \alpha$$

Domaine de confiance: surface contenue dans l'ellipse définie par

$$\textbf{intersection de } \begin{cases} \textbf{paraboloïde } \log \mathcal{L}^*(\theta_1,\theta_2) \textbf{ centré sur } \left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2\right) \\ \textbf{plan } \log \mathcal{L}^*(\theta_1,\theta_2) = -\frac{r_\alpha^2}{2} \end{cases}$$

α	rα	rα*rα/2
0.393	1.00	0.50
0.632	1.41	1.00
0.683	1.51	1.14
0.865	2.00	2.00
0.900	2.14	2.30
0.950	2.45	3.00
0.990	3.03	4.60

Résolution

$$\log \mathcal{L}^*(\theta_1,\theta_2) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\frac{\left(\theta_i-\hat{\theta}_i\right)^2}{\sigma_i^2} = -\frac{r_\alpha^2}{2}$$

1 • déterminer $\hat{\theta}_1$ et $\hat{\theta}_2$ numériquement (p.e. par itération)

2 • fixer $\theta_2 = \hat{\theta}_2$

déterminer σ_1 numériquement (p.e.graphiquement)

$$\log \mathcal{L}^*\left(\theta_1 = \hat{\theta}_1 \pm \sigma_1, \hat{\theta}_2\right) = -\frac{1}{2}$$

3 • fixer $\theta_1 = \hat{\theta}_1$

déterminer σ_2 numériquement (p.e.graphiquement)

$$\log \mathcal{L}^*\left(\hat{\theta}_1, \theta_2 = \hat{\theta}_2 \pm \sigma_2\right) = -\frac{1}{2}$$

4 • $$\sum_{i=1}^{2}\frac{\left(\theta_i-\hat{\theta}_i\right)^2}{\sigma_i^2} = r_\alpha^2$$

faire varier θ_1 par pas sur $\left[\hat{\theta}_1 - r_\alpha\sigma_1, \hat{\theta}_1 + r_\alpha\sigma_1\right]$

$$\theta_2 = \hat{\theta}_2 \pm \sqrt{r_\alpha^2 - \frac{\left(\theta_1-\hat{\theta}_1\right)^2}{\sigma_1^2}}\ \sigma_2$$

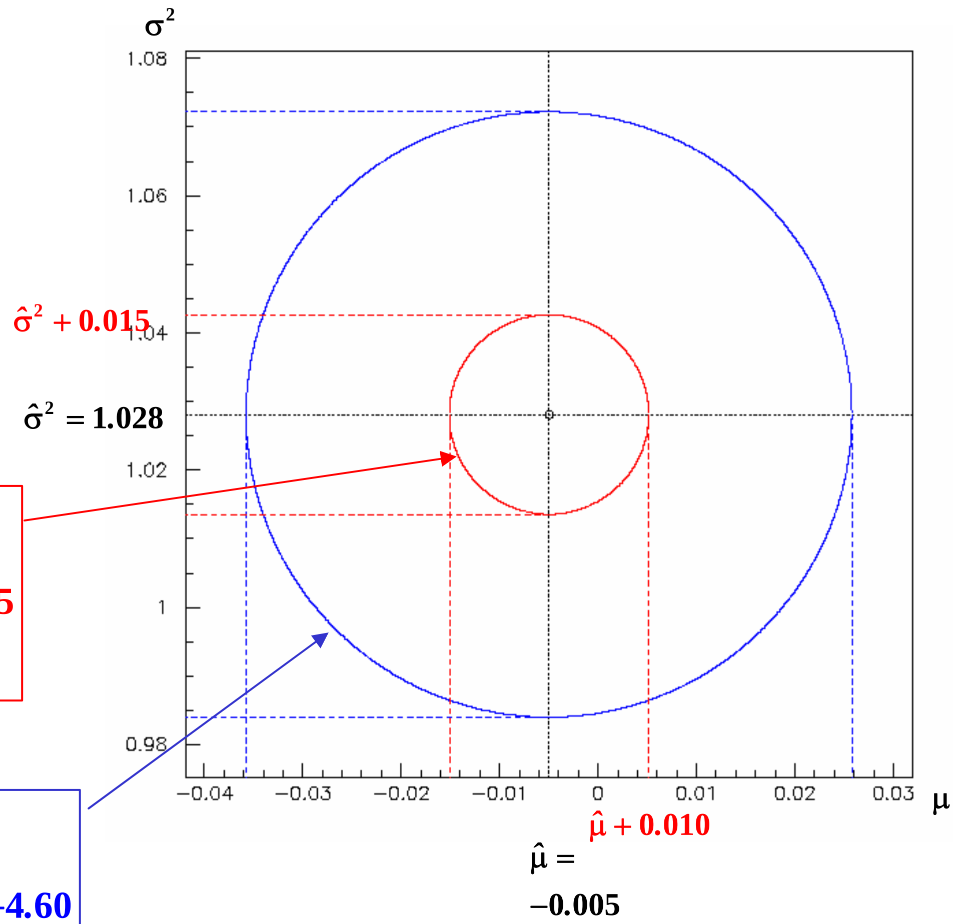
Exemple détermination simultanée de la moyenne et la variance d 'un échantillon de taille *n*=10000 extrait de *N*(0,1)

Méthode analytique:

$$\hat{\mu} = \bar{x} = 0.005 \pm 0.010$$

$$\hat{\sigma}^2 = s'^2 = 1.028 \pm 0.015$$

Méthode graphique:



$r_\alpha = 1$

$$log\ \mathcal{L}^*(\theta) = -\frac{r_\alpha^2}{2} = -0.5$$

$\alpha = 0.393$

$r_\alpha = 3.03$

$$log\ \mathcal{L}^*(\theta) = -\frac{r_\alpha^2}{2} = -4.60$$

$\alpha = 0.99$

Généralisation: détermination graphique de l ’erreur et d’un domaine de confiance pour deux paramètres corrélés à l ’approximation gaussienne

Distribution binormale de deux variables corrélées

$$f\left(x_1,x_2\right)=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2}}e^{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left(\frac{\left(x_1-\mu_1\right)^2}{\sigma_1^2}+\frac{\left(x_2-\mu_2\right)^2}{\sigma_2^2}-2\rho\frac{\left(x_1-\mu_1\right)}{\sigma_1}\frac{\left(x_2-\mu_2\right)}{\sigma_2}\right)}$$

Fonction de vraisemblance de deux variables corrélées θ_1,θ_2

approximation gaussienne : $n\to\infty$

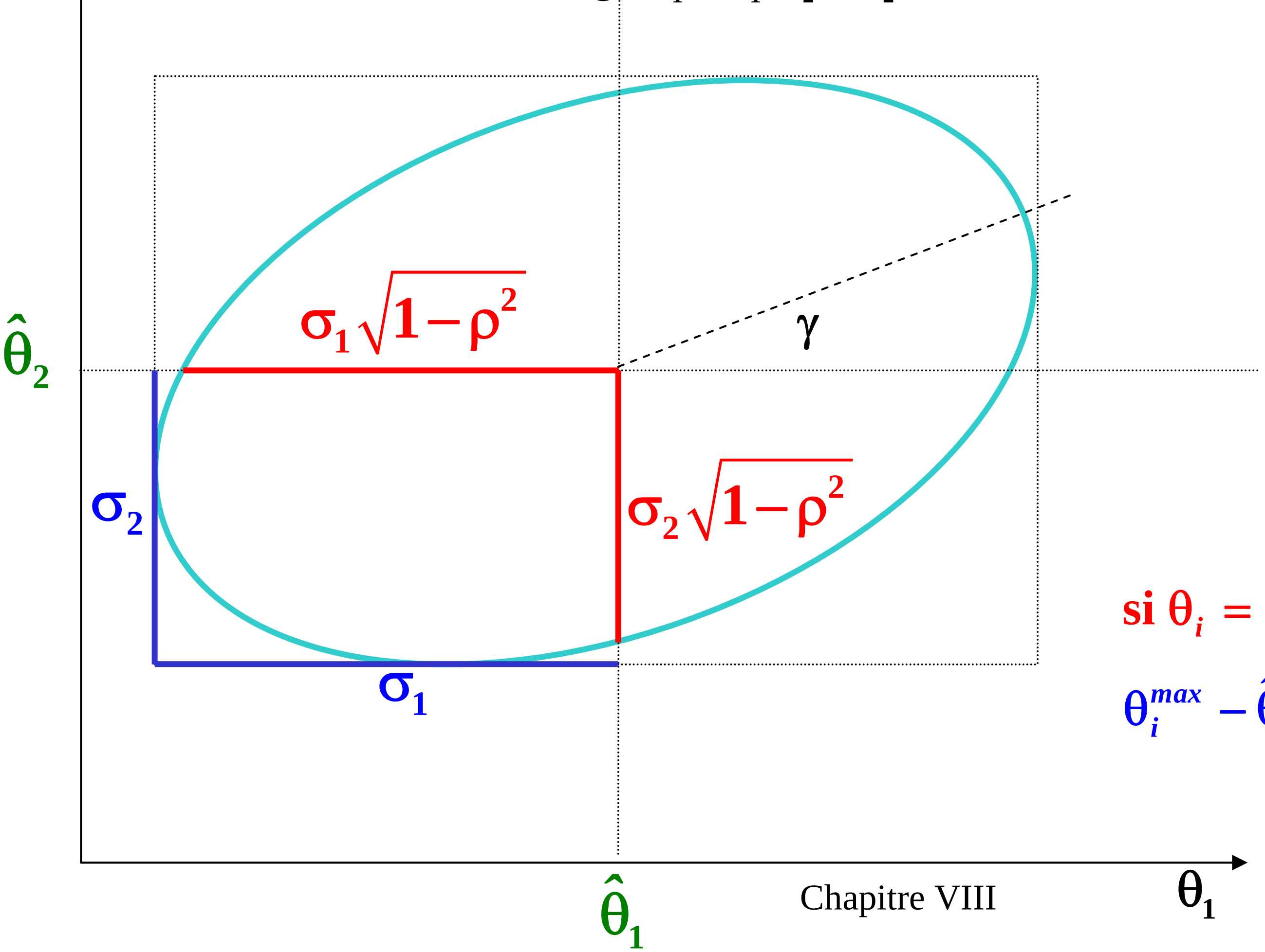
$$\mathcal{L}\left(\theta_1,\theta_2\mid\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2\right)=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2}}e^{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left(\frac{\left(\theta_1-\hat{\theta}_1\right)^2}{\sigma_1^2}+\frac{\left(\theta_2-\hat{\theta}_2\right)^2}{\sigma_2^2}-2\rho\frac{\left(\theta_1-\hat{\theta}_1\right)}{\sigma_1}\frac{\left(\theta_2-\hat{\theta}_2\right)}{\sigma_2}\right)}$$

Paraboloïde centré sur $\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2\right)$ d'axes obliques dans le système $\left(\theta_1,\theta_2\right)$

Contour $\log \mathcal{L}^*(\theta_1,\theta_2) = -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(\theta_1-\hat\theta_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(\theta_2-\hat\theta_2)^2}{\sigma_2^2}-2\rho\frac{(\theta_1-\hat\theta_1)}{\sigma_1}\frac{(\theta_2-\hat\theta_2)}{\sigma_2}\right) = -\frac{1}{2}$

ellipse centrée sur $(\hat\theta_1,\hat\theta_2)$ **d'axes non parallèles à** (θ_1,θ_2) $\left(\tan(2\gamma) = \frac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2-\sigma_2^2}\right)$

inscrite dans le rectangle $\hat\theta_1 \pm \sigma_1, \hat\theta_2 \pm \sigma_2$



$\text{si } \theta_i = \hat\theta_i \quad : \quad |\theta_j - \hat\theta_j| = \sigma_j\sqrt{1-\rho^2}$

$\theta_i^{max} - \hat\theta_i = \hat\theta_i - \theta_i^{min} = \sigma_i$

Exemple de détermination de deux paramètres corrélés

Un bruit de fond uniforme est souvent superposé au spectre de temps de vie à décroissance exponentielle d'une particule instable. Il est généré par des signaux aléatoires peuplant uniformément la fenêtre temporelle pendant laquelle est faite la mesure.

Soit un échantillon simulé de N événements comprenant :

- 95% de désintégrations de muons $\left(\tau_\mu = 2.2\mu s\right)$
- 5% de bruit de fond uniforme.

Fenêtre de mesure : $t \in \left[t_{\min} = 1\mu s, t_{\max} = 10\mu s\right]$

Paramètres à déterminer : $\tau\left(\tau_0 = 2.2\mu s\right)$ et $\varepsilon\left(\varepsilon_0 = 0.05\right)$

$$f\left(t \mid \tau,\varepsilon\right) = \frac{\varepsilon}{t_{\max} - t_{\min}} + \frac{1-\varepsilon}{\tau\left(e^{-t_{\min}/\tau} - e^{-t_{\max}/\tau}\right)} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\int_{t_{\min}}^{t_{\max}} f\left(t \mid \tau,\varepsilon\right) = \varepsilon + \left(1-\varepsilon\right) = 1$$

$$\mathscr{L}\left(\tau,\varepsilon\right) = \prod_{n=1}^{N} f\left(t_n \mid \tau,\varepsilon\right)$$

Echantillon de 10 000 événements

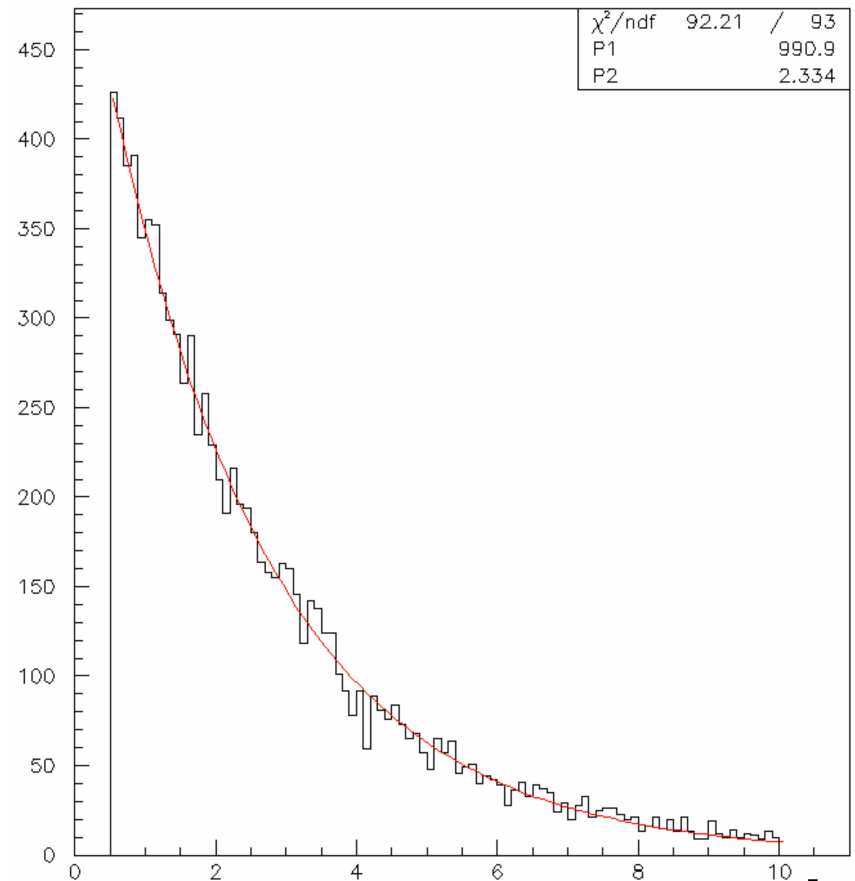
Estimation de τ en fixant ε=0.

$\hat{\tau} = 2.334 \pm 0.029 \gg 2.2$

Mais excellent accord entre histogramme et exponentielle décroissante :
$\chi^2 / N.d.L. = 92.2/93$

Taille d'échantillon insuffisante pour détecter la présence d'un bruit de fond en l'absence d'a priori sur τ.

La distribution est compatible avec ε=0.



$t[\mu s]$

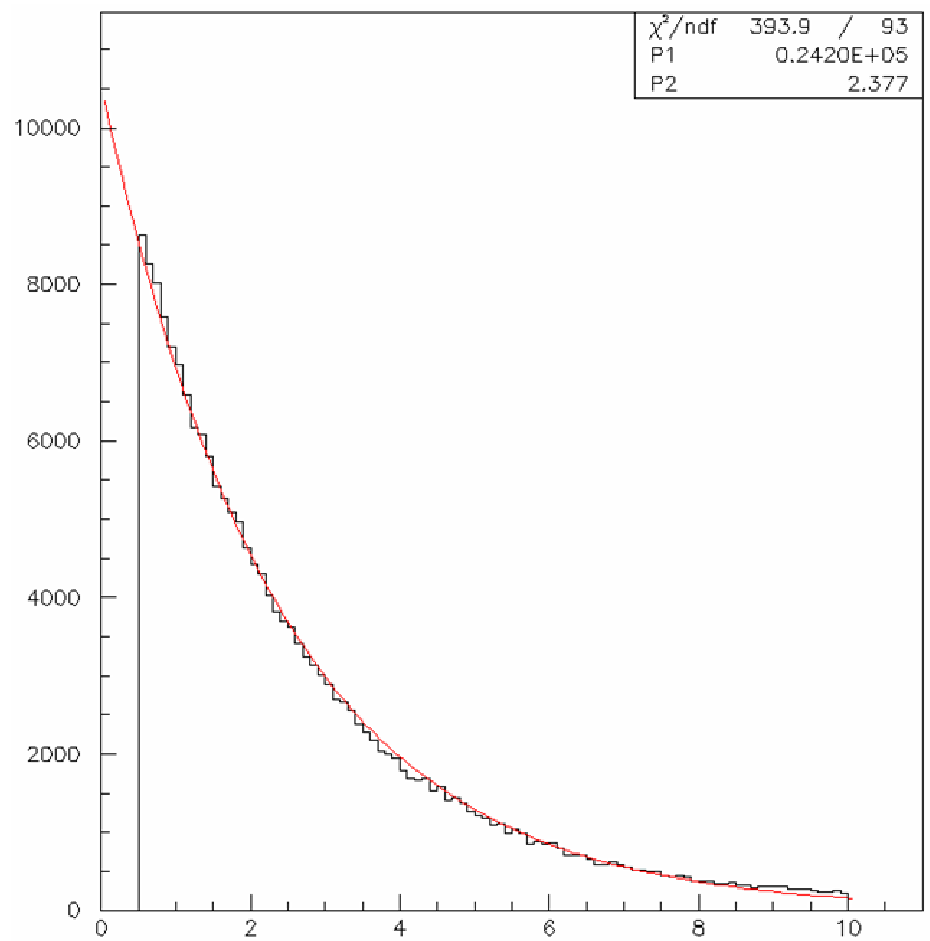
Echantillon de 200 000 événements

Estimation de τ en fixant ε=0.

$\hat{\tau} = 2.377 \pm 0.0067 \gg 2.2$

Mauvais accord entre histogramme
et exponentielle décroissante :
$\chi^2 / N.d.L. = 394/93$

Taille d'échantillon suffisante
pour détecter la présence d'un bruit de fond
en l'absence d'a priori sur τ.



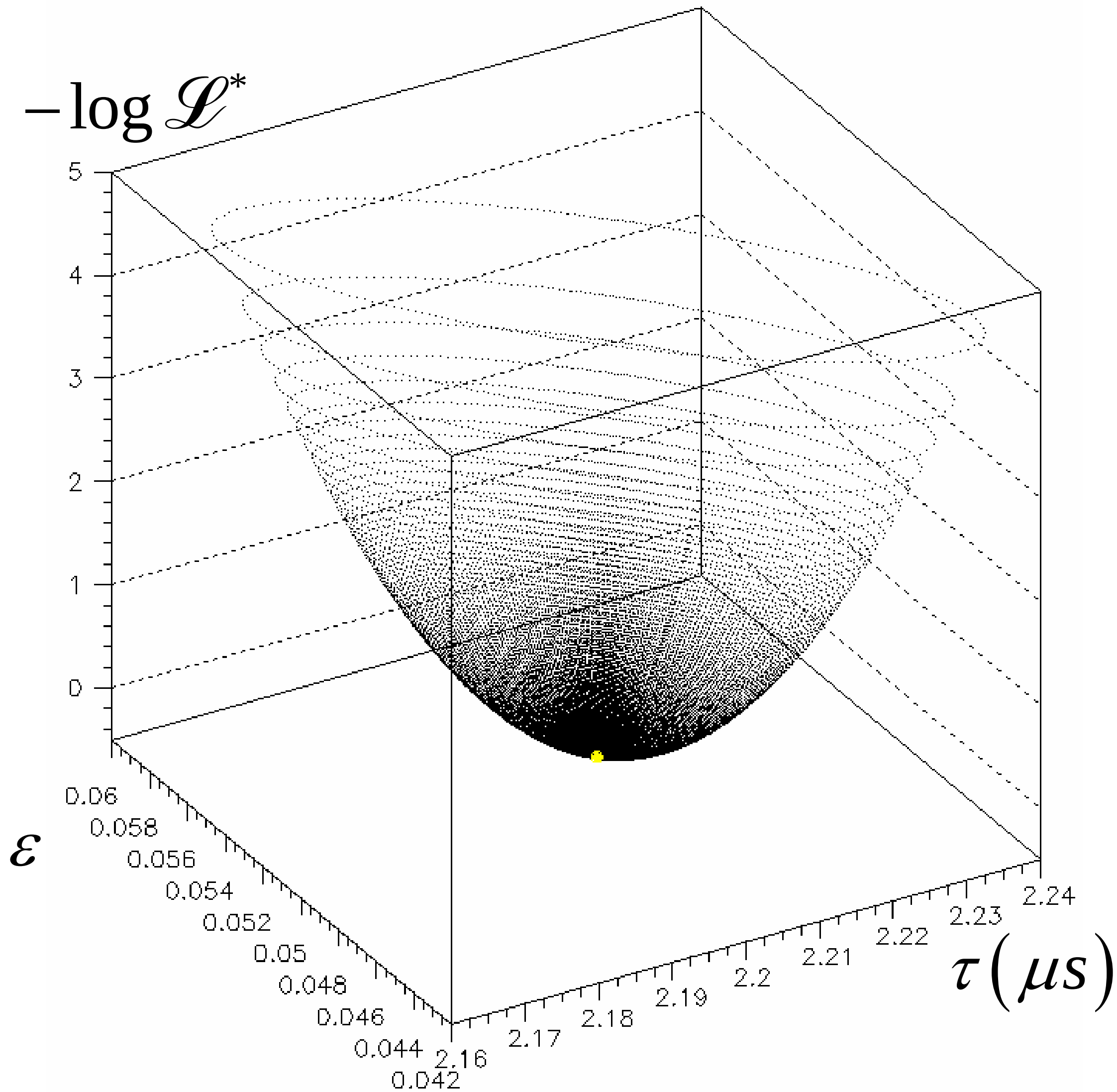
La distribution n'est pas compatible avec ε=0.

Procédure:

1∘ déterminer $\hat{\tau}$ et $\hat{\varepsilon}$ par minimisation de $-\log \mathscr{L}^{*}(\tau,\varepsilon \mid \underline{t})$

- $\hat{\tau} = 2.201\mu s$ $\quad\hat{\varepsilon} = 0.0503$

$\tau_0 = 2.2\mu s$ $\quad\varepsilon_0 = 0.05$



Procédure:

$2\circ$ déterminer $\sigma_\tau\sqrt{1-\rho^2}$

$$\tau_\pm \text{ : intersection de } \begin{cases} -\log\mathscr{L}^*\left(\tau \mid \hat{\varepsilon}, \underline{t}\right) \\ -\log\mathscr{L}^* = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\hat{\tau}-\tau_- = 0.0063 \cong \tau_+ - \hat{\tau} = 0.0065$$

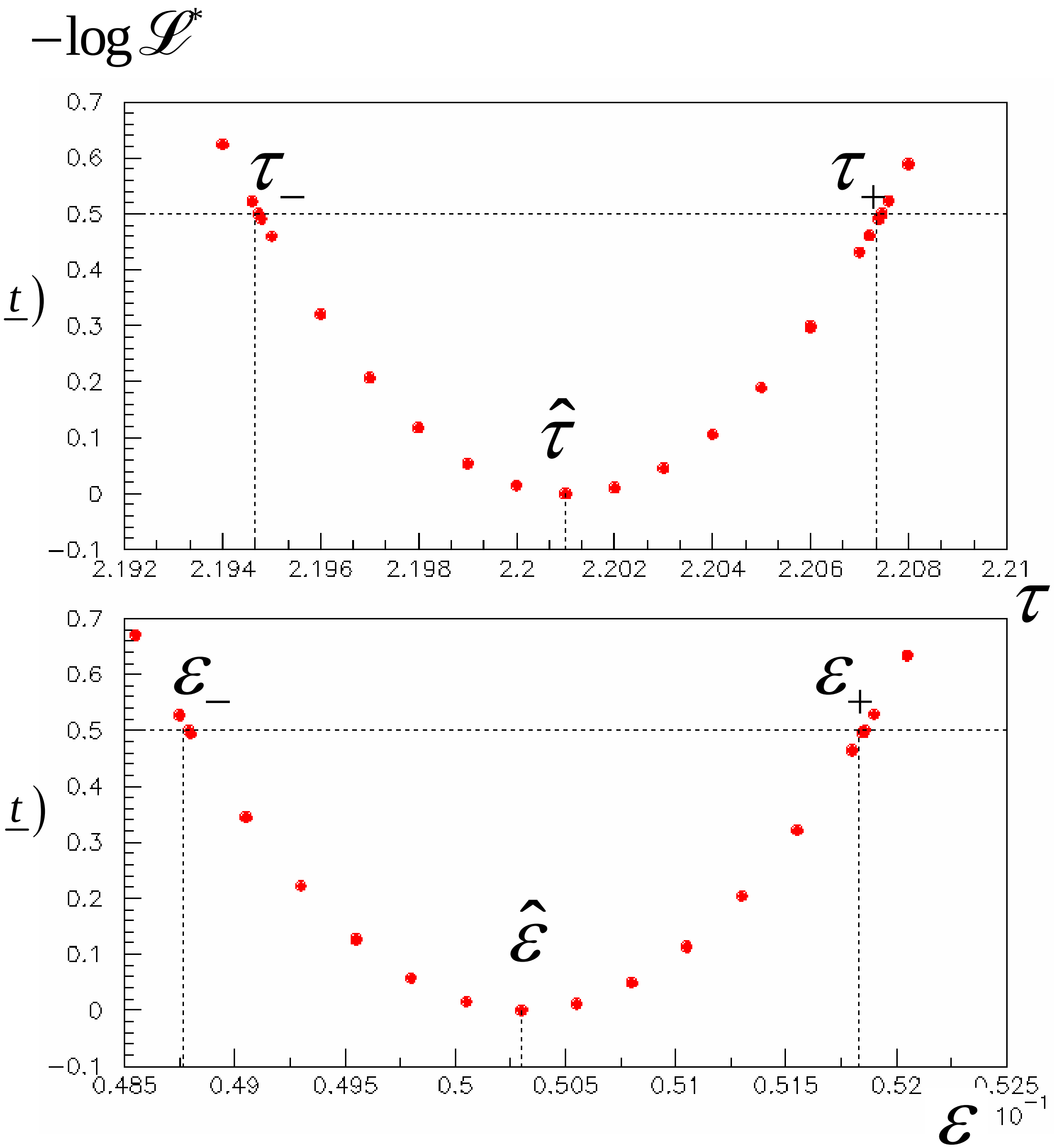
$$\sigma_\tau\sqrt{1-\rho^2} = 0.0064$$

déterminer $\sigma_\varepsilon\sqrt{1-\rho^2}$

$$\varepsilon_\pm \text{ : intersection de } \begin{cases} -\log\mathscr{L}^*\left(\varepsilon \mid \hat{\tau}, \underline{t}\right) \\ -\log\mathscr{L}^* = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\hat{\varepsilon}-\varepsilon_- = 0.00151 \cong \varepsilon_+ - \hat{\varepsilon} = 0.00156$$

$$\sigma_\varepsilon\sqrt{1-\rho^2} = 0.0015$$



Procédure:

3∘ déterminer dans le plan (τ,ε)

le contour elleptique

$$-\log \mathscr{L}^*(\tau,\varepsilon \mid \underline{t}) = \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{(\tau-\hat{\tau})^2}{\sigma_\tau^2} + \frac{(\varepsilon-\hat{\varepsilon})^2}{\sigma_\varepsilon^2}\right)$$

dont 4 points sont connus :

$$\left(\hat{\tau},\hat{\varepsilon} \pm \sigma_\varepsilon\sqrt{1-\rho^2}\right) \; et \; \left(\hat{\tau} \pm \sigma_\tau\sqrt{1-\rho^2},\hat{\varepsilon}\right)$$

4∘ déterminer les écarts types :

déterminer les extrema $\tau_{\text{min,max}}$ et $\varepsilon_{\text{min,max}}$

$\tau_{\max} - \hat{\tau} = \hat{\tau} - \tau_{\min} = \sigma_\tau = 0.011$

$\varepsilon_{\max} - \hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon} - \varepsilon_{\min} = \sigma_\varepsilon = 0.0027$

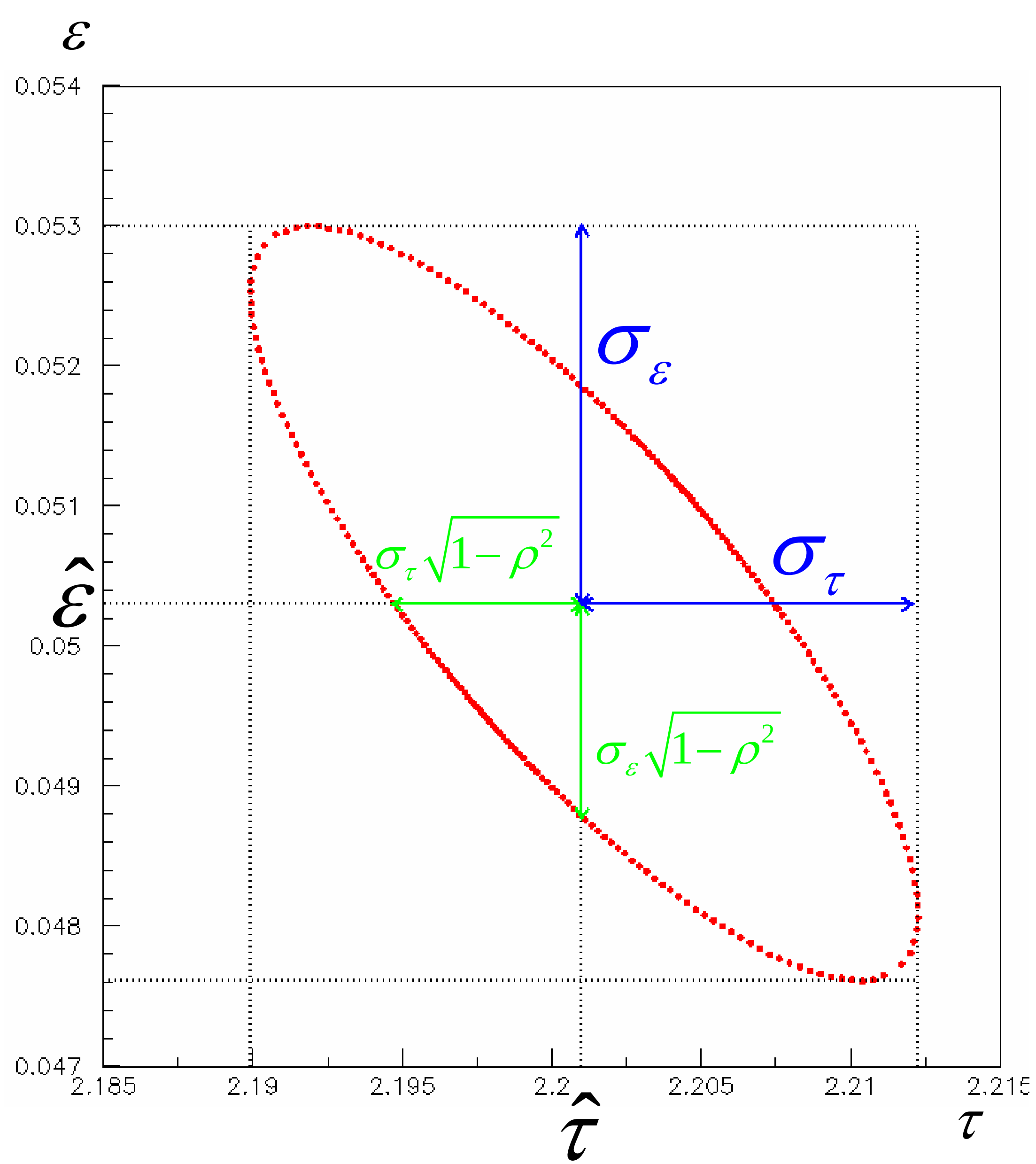
5∘ déterminer le coéficient de corrélation

connaissant $\sigma_{\tau,\varepsilon}$ et $\sigma_{\tau,\varepsilon}\sqrt{1-\rho^2}$

ρ calclué a partir de σ_τ : 0.660

ρ calclué a partir de σ_ε : 0.663

$\rho = -0.66$



Procédure:

6∘ déterminer dans le plan $\left(\tau,\varepsilon\right)$ le contours elleptique correspondant au $C.L.=\alpha$

$$r_\alpha^2 \to \alpha = \int_0^{r_\alpha^2} \chi_2^2\left(x\right)dx$$

$$-\log \mathscr{L}^*\left(\tau,\varepsilon \mid \underline{t}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\left(\tau\text{-}\hat{\tau}\right)^2}{\sigma_\tau^2}+\frac{\left(\varepsilon\text{-}\hat{\varepsilon}\right)^2}{\sigma_\varepsilon^2}\right)=\frac{r_\alpha^2}{2}$$

connaissant le contours correspondant au $C.L.=0.393,\quad r_{0.393}^2=1$

A tous $\left(\tau,\varepsilon\right)$ sur le contour $C.L.=0.393$ correspondent $\left(\tau',\varepsilon'\right)$ sur le contour $C.L.=\alpha$ tels que :

1- γ : angle entre les axes principaux de l'ellipse et ceux du systeme de coordonnées

$$\gamma=\frac{1}{2}\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\rho\sigma_\tau\sigma_\varepsilon}{\sqrt{\sigma_\tau^2-\sigma_\varepsilon^2}}\right)$$

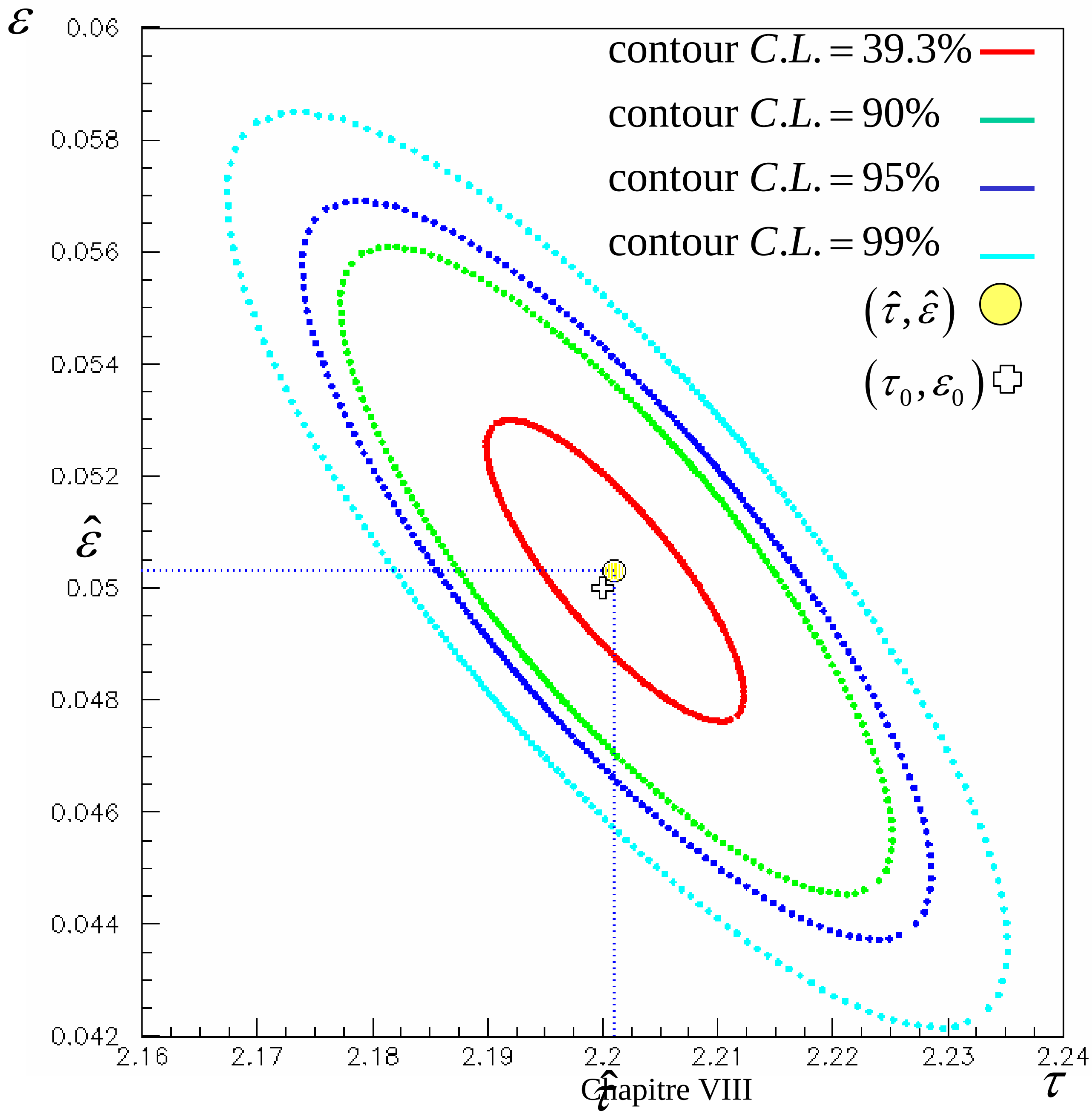
2- translation de $\left(\tau,\varepsilon\right)$ de $\left(-\hat{\tau},-\hat{\varepsilon}\right)$ et rotation de $\left(-\gamma\right)$ autour de $\left(0,0\right)\Rightarrow\left(\tau_\gamma,\varepsilon_\gamma\right)$

3- facteur d'échelle r_α sur $\left(\tau_\gamma,\varepsilon_\gamma\right)\Rightarrow\left(\tau'_\gamma,\varepsilon'_\gamma\right)$

4- rotation de $\left(\tau'_\gamma,\varepsilon'_\gamma\right)$ de γ autour de $\left(0,0\right)$ et translation de $\left(\hat{\tau},\hat{\varepsilon}\right)\Rightarrow\left(\tau',\varepsilon'\right)$

$$\tau'=\hat{\tau}+r_\alpha\left(\left(\tau\text{-}\hat{\tau}\right)\cos\gamma-\left(\varepsilon\text{-}\hat{\varepsilon}\right)\sin\gamma\right)\cos\gamma+r_\alpha\left(\left(\tau\text{-}\hat{\tau}\right)\cos\gamma-\left(\varepsilon\text{-}\hat{\varepsilon}\right)\sin\gamma\right)\sin\gamma$$

$$\varepsilon'=\hat{\varepsilon}+r_\alpha\left(\left(\tau\text{-}\hat{\tau}\right)\cos\gamma-\left(\varepsilon\text{-}\hat{\varepsilon}\right)\sin\gamma\right)\cos\gamma-r_\alpha\left(\left(\tau\text{-}\hat{\tau}\right)\cos\gamma-\left(\varepsilon\text{-}\hat{\varepsilon}\right)\sin\gamma\right)\sin\gamma$$



ε
0.06
0.058
0.056
0.054
0.052
0.05
0.048
0.046
0.044
0.042
$\hat{\varepsilon}$
2.16
2.17
2.18
2.19
2.2
2.21
2.22
2.23
2.24
$\hat{\tau}$
τ
contour $C.L. = 39.3\%$
contour $C.L. = 90\%$
contour $C.L. = 95\%$
contour $C.L. = 99\%$
$(\hat{\tau}, \hat{\varepsilon})$
(τ_0, ε_0)

Généralisation: détermination graphique de l'erreur et d'un domaine de confiance pour deux paramètres corrélés avec de petits échantillons

$\mathcal{L}^*\left(\theta_1,\theta_2 \mid \hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2\right)$ **n'est plus un paraboloïde centré sur** $\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2\right)$

Contour à $\log\ \mathcal{L}^*\left(\theta_1,\theta_2\right) = Cste$ **n'est plus ellipse centrée sur** $\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2\right)$

Domaine de confiance correspondant au niveau de confiance α:

surface contenue dans la courbe

intersection de $\begin{cases} \log \mathcal{L}^*\left(\theta_1,\theta_2\right) \\ \text{plan } \log \mathcal{L}^*\left(\theta_1,\theta_2\right) = -\dfrac{1}{r_\alpha^2} \end{cases}$

Généralisation: détermination graphique de l'erreur et d'un domaine de confiance pour *N* paramètres corrélés avec de petits échantillons

Méthode reste valable en théorie: $\chi_2^2 \rightarrow \chi_N^2$

r_α **tel que** $\int_0^{r_\alpha^2} \chi_N^2\left(r^2\right) dr^2 = \alpha$

En pratique difficile à mettre en oeuvre si *n* petit, *N* grand et corrélations