VI - Tests d'hypothèse

Principe du test d'hypothèse

Définir un test permettant d'accepter ou de rejeter une hypothèse H_0, appelée **hypothèse nulle** ou **hypothèse testée**, complètement spécifiée, en fixant une probabilité α **a priori**, la **signifiance** ou le **niveau de signifiance** du test, de commettre une **erreur de type I**, c.a.d. de rejeter l'hypothèse H_0 alors qu'elle est vraie.

Étant donné les fluctuations statistiques liées aux erreurs de mesure ou aux tailles des échantillons

Si H_0 a une probabilité 1 d'être vraie, le test n'a pas de sens. Il faut donc qu'il existe une **hypothèse alternative** H_1 dont la forme la plus triviale est que H_0 soit fausse.

Si H_1 est complètement spécifiée, il est possible de calculer la probabilité β de commettre une **erreur de type II** : accepter H_0 alors que c'est H_1 qui est vrai. Dans ce cas, on choisira le test dont la probabilité de commettre une **erreur de type II** minimale. On appelle **$1-\beta$** la **puissance** du test.

Quand H_1 n'est que partiellement définie, il est néanmoins souvent possible de définir le test dont la puissance est maximale, mais sans pouvoir calculer cette puissance.

Définitions

Test d'hypothèse paramétrique: valeurs numériques

• La mesure d'un paramètre affectée de son erreur est-elle en accord avec la prédiction d'un modèle?

• Deux mesures d'un même paramètre sont-elles en accord compte tenu des erreurs de mesure?

Test d'hypothèse non paramétrique: formes de distributions

• Une distribution expérimentale en-elle accord, dans la limite de ses fluctuations statistique, avec celle prédite par un modèle?

• Deux distributions expérimentales sont-elle en accord dans la limite de leurs fluctuations statistiques?

Hypothèse simple: tous les paramètres sont spécifiés
Hypothèse composite: une partie ou aucun paramètre n'est spécifié

Test d'hypothèse numérique simple

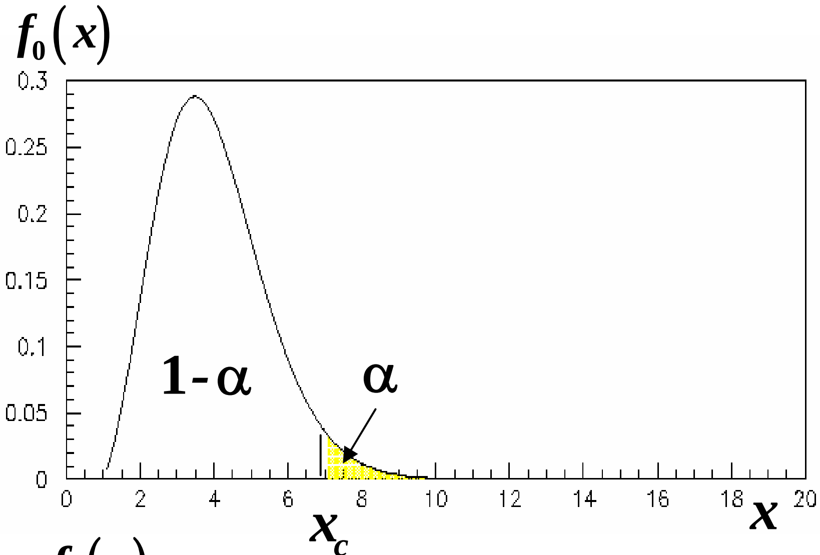
Soient:

H_0: fdp $f(x) = f_0(x)$ complétement spècifièe

H_1: fdp $f(x) = f_1(x)$ complétement spècifièe

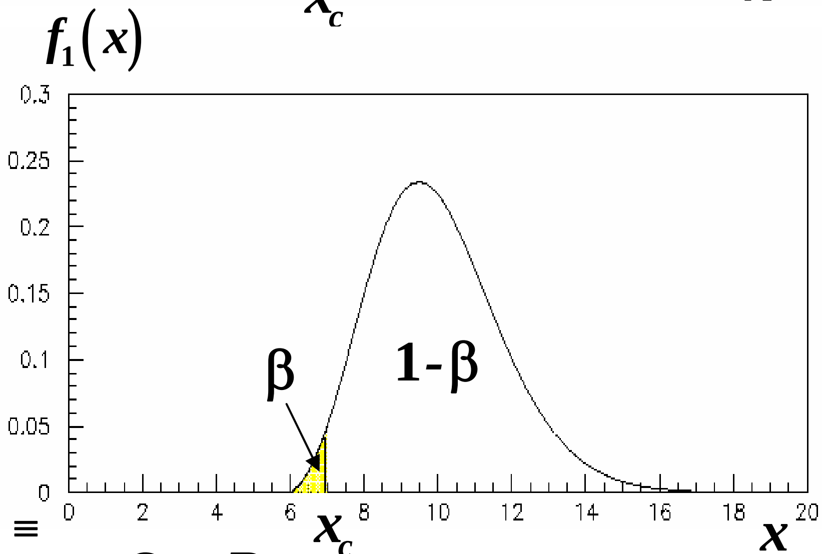
Ω le domaine des valeurs possibles de x

Un niveau de signifiance α a priori.



Region critique ou de réjection : $R_\alpha \Rightarrow \int_{R_\alpha} f_0(x)dx = \alpha$

Region d'acceptance: $A_\alpha = \Omega - R_\alpha$



$\exists$ Infinité de régions $R_\alpha \subset \Omega \quad \Rightarrow \int_{R_\alpha} f_0(x)dx = \alpha$

Specification de R_α par la condition :

La probabilité β d'erreur II $= \int_{A_\alpha} f_1(x)dx$ est minimale $\equiv$

La puissance $1-\beta$ $= \int_{R_\alpha=\Omega-A_\alpha} f_1(x)dx$ est maximale

$\Omega \subset \mathbb{R}$

$A_\alpha \equiv x \le x_c$

$R_\alpha \equiv x > x_c$

Définition de la zone critique (de réjection) R_α

Maximiser la puissance $(1-\beta) = \int_{R_\alpha} f_1(x)\,dx = \int_{R_\alpha} \frac{f_1(x)}{f_0(x)} f_0(x)\,dx = \alpha\, E\left[\frac{f_1(x)}{f_0(x)}\right]$

R_α **: domaine où** $f_0(x) \equiv 0$

domaine où $\frac{f_1(x)}{f_0(x)} \geq k_\alpha$

Généralisation : n mesures $(x_1,\ldots,x_n)$ de x indépendantes

$\mathcal{L}(\underline{x} \mid f_0) = \prod_{i=1}^{n} f_0(x_i)$ **fonction de vraisemblance**

$\mathcal{L}(\underline{x} \mid f_1) = \prod_{i=1}^{n} f_1(x_i)$

R_α **:domaine où** $\frac{\mathcal{L}(\underline{x} \mid f_1)}{\mathcal{L}(\underline{x} \mid f_0)} \geq k_\alpha$ **étant donné** $\int_{R_\alpha} \mathcal{L}(\underline{x} \mid f_0)\,d\underline{x} = \alpha$

En pratique: recherche de la région critique d'une statistique, μ, S^2, s^2 **de l'échantillon**

Exemple: temps de désintégration d'un noyau radioactif

échantillon $\underline{t} = (t_1, ..., t_n)$ **de mesures du temps de vie**

H_0**:noyau identifié par le temps de vie** τ_0

H_1**:noyau identifié par le temps de vie** $\tau_1 > \tau_0$

$$\frac{\mathcal{L}_1(\underline{t})}{\mathcal{L}_0(\underline{t})} = \frac{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\tau_1} e^{-\frac{t_i}{\tau_1}}}{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\tau_0} e^{-\frac{t_i}{\tau_0}}} = \frac{\frac{1}{\tau_1^n} e^{-\frac{1}{\tau_1}\sum_{i=1}^{b} t_i}}{\frac{1}{\tau_0^n} e^{-\frac{1}{\tau_0}\sum_{i=1}^{b} t_i}} = \left(\frac{\tau_0}{\tau_1}\right)^n e^{-\frac{n\bar{t}(\tau_0-\tau_1)}{\tau_0\tau_1}} \geq k_\alpha$$

$$\bar{t} \geq \frac{\tau_0\tau_1}{\tau_0-\tau_1}\left(ln\,\tau_0 - ln\,\tau_1 - \frac{ln\,k_\alpha}{n}\right) = t_\alpha$$

Pour déterminer t_α**, il faut connaître la fdp de** $\bar{t}$

$\tau_1 > \tau_0 \Rightarrow R_\alpha$ **formé par les grandes valeurs de** $\bar{t}$

R_α **indépendant de la valeur exacte de** τ_1

puissance du test dépendra de τ_1

• **Premier cas simple: $n = 1$**

$$\bar{t} \equiv t \Rightarrow f(t \mid \tau) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

- Zone critique R_α

$$\alpha = \int_{R_\alpha} f(t \mid \tau_0)\, dt = \int_{t_\alpha}^{\infty} \frac{1}{\tau_0} e^{-\frac{t}{\tau_0}} dt = e^{-\frac{t_\alpha}{\tau_0}}$$

$$t_\alpha = -\tau_0 \ln\alpha \Rightarrow$$

$R_\alpha : t \ge t_\alpha = -\tau_0 \ln\alpha$ **indépendant de τ_1**

-Puissance du test $1-\beta$

$$\int_{-\tau_0 \ln\alpha}^{\infty} \frac{1}{\tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} dt = e^{-\frac{\tau_0 \ln\alpha}{\tau_1}} = \alpha^{\tau_0/\tau_1}$$

-soit α=0.05 $\Rightarrow$ 5% erreurs de type I a priori

$t_\alpha = -\tau_0 \ln 0.05 \cong 3\tau_0$

si $\tau_1 = 2\tau_0$: $1-\beta = 0.22 \Rightarrow$ 78% erreurs de type II

si $\tau_1 = 100\tau_0$: $1-\beta = 0.97 \Rightarrow$ 3% erreurs de type II

-soit α=0.5 $\Rightarrow$ 50% erreurs de type I a priori

$t_\alpha = -\tau_0 \ln 0.5 \cong 0.7\tau_0$

si $\tau_1 = 2\tau_0$: $1-\beta = 0.71 \Rightarrow$ 29% erreurs de type II

si $\tau_1 = 22\tau_0$: $1-\beta = 0.97 \Rightarrow$ 3% erreurs de type II

• **Deuxième cas simple: n grand**

$$f(\bar{t} \mid \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau^2/n}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\bar{t}-\tau)^2}{\tau^2/n}}$$

soit α=0.05 et $n = 100$

- Zone critique R_α

$$\alpha = \int_{R_\alpha} f(\bar{t} \mid \tau_0)\, d\bar{t} = \int_{t'_\alpha}^{\infty} N(0,1)\, dx$$

t'_α extrait de la table: $t'_{0.05} = 1.645$

indépendant de τ_1

$$\Rightarrow t_\alpha = \tau_0 + t'_\alpha \tau_0/\sqrt{n} = \tau_0\left(1 + 1.645/\sqrt{100}\right)$$

$$= 1.165\tau_0$$

si $\bar{t} > 1.165\tau_0$, H_0 rejeté avec α=5%

-Puissance du test $1-\beta$

$$\text{soit } t''_\alpha = \frac{t_\alpha - \tau_1}{\tau_1/\sqrt{n}} : 1-\beta = \int_{t''_\alpha}^{\infty} N(0,1)\, dx$$

$$\text{soit } \tau_1 = 2\tau_0 : \quad t''_{0.05} = \frac{1.1645\tau_0 - 2\tau_0}{2\tau_0/\sqrt{100}} = -4.177$$

$1-\beta = 0.99999 \Leftrightarrow$ consistance du test

• **Exercice**

Taille de l'échantillon n pour avoir α=0.05 et $(1\text{-}\beta) = 0.99$?

$n = 40$

Tests de la moyenne d'une distribution normale – variance connue

$\mathrm{H_0}$: échantillon extrait d'une $N\left(\mu=\mu_0, \sigma^2=\sigma_0^2\right)$

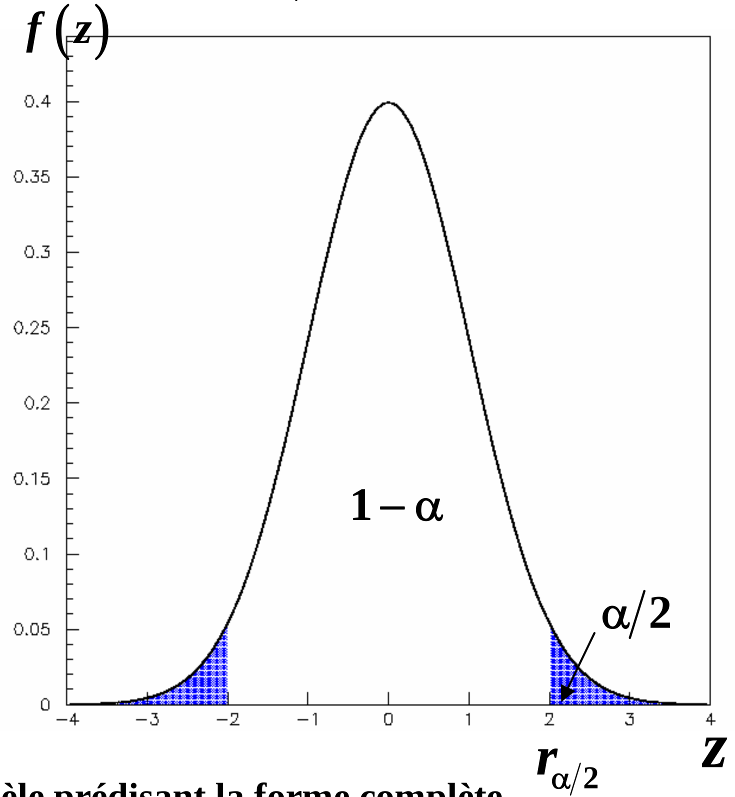
$\mathrm{H_1}$: $\mu \neq \mu_0$ $\rightarrow$ **hypothèse composite, puissance du test non calculable**

Si $\mathrm{H_0}$ vrai:

$$z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \text{ est distribuée suivant une } N(0,1)$$

R_α: **domaine des grandes valeurs de** $|z| > r_{\alpha/2}$

$$\rightarrow \alpha/2 = \int_{-\infty}^{-r_{\alpha/2}} N(z\,|\,0,1)\,dz = \int_{r_{\alpha/2}}^{\infty} N(z\,|\,0,1)\,dz$$



Exemples:

-la moyenne de grands échantillons comparée à la moyenne d'un modèle prédisant la forme complète de la distribution (fdp), et donc σ^2, même si la fdp n'est pas gaussienne (théorème central limite)

-la mesure d'un paramètre d'erreur standard connue comparée à sa prédiction théorique: l'erreur standard sur une mesure est interprétée comme l'écart type des mesures potentielles autour de la vraie valeur.

Tests de la moyenne d'une distribution normale – variance inconnue

Soit $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ la moyenne d'un échantillon de taille n

H_0 : échantillon extrait d'une $N\left(\mu = \mu_0, \sigma^2 = ??\right)$

H_1 : $\mu \neq \mu_0$ $\rightarrow$ hypothèse composite, puissance du test non calculable

Si H_0 vrai :

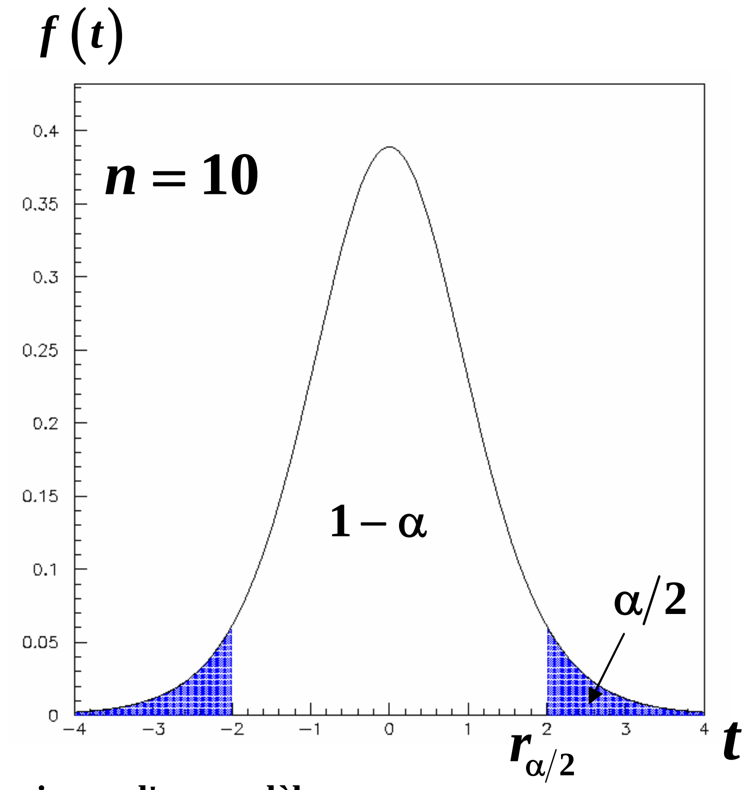
$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$ est distribuée suivant une t_{n-1} de Student

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$$

R_α : domaine des grandes valeurs de $|t| > r_{\alpha/2}$

$$\rightarrow \alpha/2 = \int_{-\infty}^{-r_{\alpha/2}} t_{n-1}(t)\,dt = \int_{r_{\alpha/2}}^{\infty} t_{n-1}(t)\,dt$$

$$lim_{n\to\infty}\, t_n = N(0,1) \qquad \equiv \qquad lim_{n\to\infty}\, s^2 = \sigma^2$$



Exemples:

-la moyenne de petits échantillons comparée à la moyenne de la fdp gaussienne d'un modèle

-la moyenne des mesures d'un paramètre comparée à sa prédiction théorique

Comparaison entre les moyennes de distributions normales

Soit $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ la moyenne d'un échantillon de taille n

$\bar{y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} y_i$ la moyenne d'un échantillon de taille m

H_0: deux échantillons extraits de normales de même $\mu = \mu_0$

connaissant les variances σ_x^2 et σ_y^2

H_1: H_0 est faux $\rightarrow$ hypothèse composite

$\rightarrow$ puissance du test non calculable

Si H_0: $(\bar{x} - \bar{y})$ distribuée suivant une $N\left(\mu_0 - \mu_0 = 0, \sigma_x^2/n + \sigma_y^2/m\right)$

$$z = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\sigma_x^2/n + \sigma_y^2/m}} \text{ distribué suivant une } N(0,1)$$

R_α: domaine des grandes valeurs de $|z| > r_{a/2}$

$$\rightarrow \alpha/2 = \int_{-\infty}^{-r_{a/2}} N(z \mid 0,1)\, dz = \int_{r_{a/2}}^{\infty} N(z \mid 0,1)\, dz$$

Exemple: comparaison entre deux mesures affectées d'erreurs standard

H_0 : deux échantillons extraits de normales de même $\mu = \mu_0$

de variances non connues mais égales $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_0^2$

H_1 : H_0 est faux $\rightarrow$ hypothèse composite

$\rightarrow$ puissance du test non calculable

$\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ **est une hypothèse raisonnable si les deux procédures expérimentales sont semblables**

Si H_0 : $z = \dfrac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\sigma_0^2/n + \sigma_0^2/m}}$ **distribuée suivant une $N(0,1)$**

$(n-1)s_x^2/\sigma_0^2$ **et** $(m-1)s_y^2/\sigma_0^2$ **distribuées suivant des χ^2_{n-1} et χ^2_{m-1}**

$\rightarrow (n-1)s_x^2/\sigma_0^2 + (m-1)s_y^2/\sigma_0^2$ **distribuées suivant des χ^2_{n+m-2}**

$$t = \frac{\dfrac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\sigma_0^2/n + \sigma_0^2/m}}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)s_x^2/\sigma_0^2 + (m-1)s_y^2/\sigma_0^2}{n+m-2}}} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\dfrac{\left((n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2\right)(n+m)}{nm(n+m-2)}}}$$ **est distribuée suivant t_{n+m-2}**

t est une bonne statistique de test indépendante des iconnues σ_x^2, σ_y^2

H_0: deux échantillons extraits de normales de même $\mu = \mu_0$

de variances non connues σ_X^2 et σ_y^2

$$t = \frac{\dfrac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\sigma_x^2/n + \sigma_y^2/m}}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)s_x^2/\sigma_x^2 + (m-1)s_y^2/\sigma_y^2}{n+m-2}}}$$ **est distribuée suivant t_{n+m-2}**

t contient les inconnues σ_X^2 et σ_y^2 et n'est pas une statistique

$\nexists$ aucune statistique de test de fdp connue

Si n, m suffisamment grands: approximation $s_x^2 \approx \sigma_x^2$ et $s_y^2 \approx \sigma_y^2$

$$z = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{s_x^2/n + s_y^2/m}}$$ **distribuée suivant une $N(0,1)$**

Comparaison entre les variances de distributions normales

Soit $S_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \mu_x\right)^2$ la variance d'un échantillon de taille n

$S_y^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(y_i - \mu_y\right)^2$ la variance d'un échantillon de taille m

H_0: deux échantillons extraits de normales de même $\sigma^2 = \sigma_0^2$ connaissant les moyennes μ_x et μ_y

H_1: H_0 est faux $\rightarrow$ hypothèse composite

$\rightarrow$ puissance du test non calculable

Si H_0: $\frac{nS_x^2}{\sigma_0^2}$ et $\frac{mS_y^2}{\sigma_0^2}$ distribuées suivant des χ_n^2 et χ_m^2

$$F = \frac{\frac{nS_x^2}{\sigma_0^2} \Big/ n}{\frac{mS_y^2}{\sigma_0^2} \Big/ m} = \frac{S_x^2}{S_y^2}$$ statistique de test distribuée suivant une Fisher $F_{n,m}$

Définition de la zone critique R_α : $F < r^-_{\alpha/2}$ ou $F > r^+_{\alpha/2}$

$$r^-_{\alpha/2} \rightarrow \int_0^{r^-_{\alpha/2}} F_{nm}(F)\,dF = \alpha/2 \quad \text{et} \quad r^+_{\alpha/2} \rightarrow \int_{r^+_{\alpha/2}}^{\infty} F_{nm}(F)\,dF = \alpha/2$$

Si H_1 : $\sigma^2_x < \sigma^2_y$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\sigma^2_x > \sigma^2_y$

$$R_\alpha : \quad F < r^-_\alpha \rightarrow \int_0^{r^-_\alpha} F_{n,m}(F)\,dF = \alpha \qquad\qquad F > r^+_\alpha \rightarrow \int_{r^+_\alpha}^{\infty} F_{n,m}(F)\,dF = \alpha$$

H_0 : deux échantillons extraits de normales de même $\sigma^2 = \sigma^2_0$

moyennes μ_x et μ_y inconnues

H_1 : H_0 est faux $\rightarrow$ hypothèse composite

$\rightarrow$ puissance du test non calculable

$$F = \frac{s^2_x}{s^2_y}$$ **statistique de test distribuée suivant une Fisher $F_{n-1,m-1}$**

$$s^2_x = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$$ **la variance d'un échantillon de taille n**

$$s^2_y = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\left(y_i - \bar{y}\right)^2$$ **la variance d'un échantillon de taille m**

Tests non-paramétriques

Comparaison entre des distributions expérimentale et théorique ou entre distributions expérimentales

Tests de Pearson en χ^2-répartition en classes

Répartition des n observations $\underline{x} = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ de la variable aléatoire x en $N < n$ classes

Si x est numérique : n_i valeurs dans classe i définie habituellement par $X_i \leq x < X_{i+1}$

Ensemble des classes $\equiv$ histogramme

$$\sum_{i=1}^{N} n_i = n$$

Rappel:

les n_i sont distribués suivant des binomiales de probabilité $p_i = E\left[n_i/n\right]$

$$\lim_{\substack{p_i \to 0\ \forall i \\ n \to \infty}} \text{binomiale} \to \text{Poisson}$$

$$\lim_{n_i \to \infty\ \forall i} \text{Poisson} \to \text{normale}$$

les $n_i \approx$ distribués suivant des $N\left(np_i, np_i\right)$ avec $N-1$ degrés de libertés

Soit $f_0(x)$ la fdp de x prédite par un modèle théorique

H_0: $\underline{x}$ est un échantillon extrait d'une population de fdp $f_0(x)$

H_1: H_0 est faux

Si H_0 vrai: $p_i = p_{0i} \quad \forall i = 1, N$

$$p_{0i} = \int_{X_i}^{X_{i+1}} f_0(x)\,dx$$

Statistique: $X^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(n_i - np_{0i})^2}{np_{0i}}$ approximativement distribuée suivant une χ^2_{N-1}

N - 1 degrés de liberté parce que seules N - 1 classes peuvent fluctuer: $n_N = n - \sum_{i}^{N-1} n_i$

Si le modèle prédit la forme $f_0(x)$ et le nombre n_0 d'observations:

$$n_{0i} = n_0 \int_{X_i}^{X_{i+1}} f_0(x)\,dx$$

Statistique: $X^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(n_i - n_{0i})^2}{n_{0i}}$ approximativement distribuée suivant une χ^2_{N}

Les N classes peuvent fluctuer

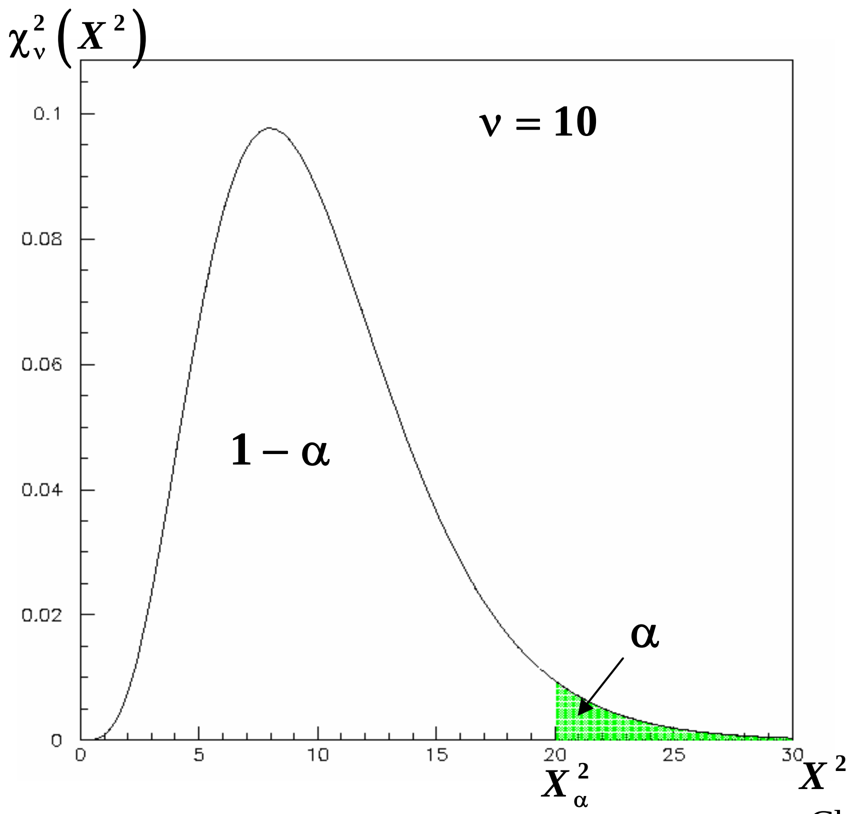
Zone critique R_α: grandes valeurs de $X^2 > X^2_\alpha$

$$X^2_\alpha \Rightarrow \int_{X^2_\alpha}^{\infty} \chi^2_\nu\left(X^2\right) dX^2 = \alpha \qquad \left(\nu = N \text{ ou } N - 1\right)$$

H_0 acceptée si $X^2 \le X^2_\alpha$

Note: si H_0 vrai: $E\left[X^2_\alpha\right] = \nu \;\Rightarrow$ petites valeurs de X^2 improbables (trop bon accord!)

mais petites valeurs de X^2 encore plus improbables si H_1 vrai



Exemple: test de la théorie de Mandel transmission des caractères dominants (A,B) et récessifs (a,b) sur 556 descendants

caractéristique	mesure	modèle
AB	302	$556 \times 9/16 = 313$
Ab	114	$\times 3/16 = 104$
aB	100	$\times 3/16 = 104$
ab	40	$\times 1/16 = 35$

$\nu = 3$ et $X^2 = 2.22$

Soit α=0.05 $\Rightarrow X^2_{0.05} = 7.81$

$X^2 < X^2_{0.05}$ et l'hypothèse testée est acceptée

 Mauvais exemple !! $p_i \cancel{\gg} 0 \;\; \forall i$

Choix des classes

Contraintes contradictoires:

binomiale → Poisson ⇒ p_i petits ⇒ beaucoup de classes
Poisson → gaussienne ⇒ n_i grands ⇒ beaucoup de mesures par classe

Perte d'information:

beaucoup de mesures par classe ⇒ classes larges ⇒ perte d'information

Deux méthodes:

classes de largeurs égales : arithmétique est plus simple
classes de contenus égaux: n_i grands (≈25) sans perte d'information inutile

Exemple de test de Pearson en χ^2

1000 mesures de temps de vie

H_0: fdp est une exponentielle de moyenne $\mu = 2\ \mu s$

$$p_{0i} = \int_{T_i}^{T_{i+1}} \frac{1}{2} e^{-\frac{t[\mu s]}{2}} dt$$

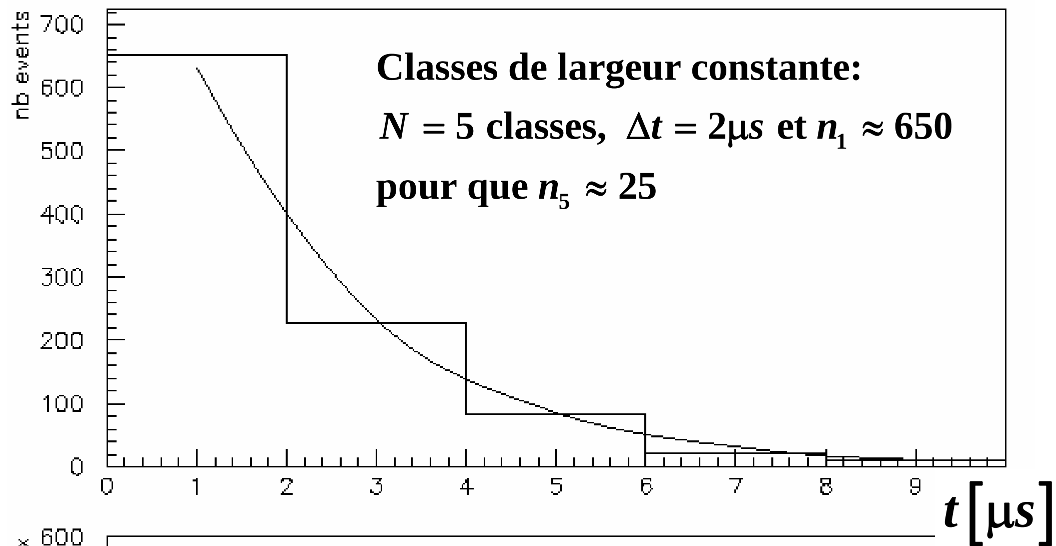
$$X^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(n_i - np_{0i})^2}{np_{0i}} = 34.8$$

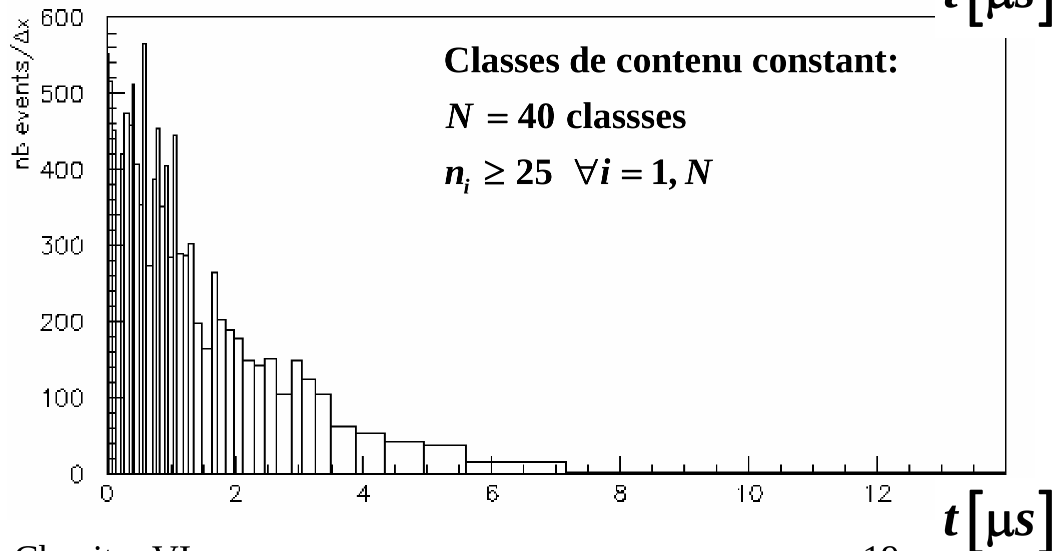
$$\nu = N - 1 = 39$$

soit α=0.05

$$X^2_{0.05,39} = 54.5 > X^2 = 34.8$$

H_0 acceptée au niveau de signification de 5%





Niveau de confiance de l'accord entre distributions

La statistique X^2 du test de Pearson permet de calculer ipso facto la probabilité (le niveau de confiance) $C.L.$ de l'accord entre distributions expérimentale et théorique:

$$\boxed{C.L. = \int_{X^2}^{\infty} \chi_\nu^2\left(x^2\right)dx^2 \quad \left(\nu = N \text{ ou } N-1\right)}$$

Accepter l'hypothèse H_0 si $X^2 \leq X_\alpha^2$ revient à l'accepter si $C.L. \geq \alpha$

Si H_0 est vrai: $C.L. = 1$ - fonction de distribution de X^2 $\rightarrow$ f.d.p. de $C.L.$ est uniforme

Démonstration:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy \qquad \text{ou} \qquad dF(x) = f(x)dx$$

calculons la fdp $g\left(F(x)\right)$ de $F(x)$

$$g\left(F(x)\right) = f(x)\left|\frac{dx}{dF(x)}\right| = \frac{f(x)dx}{f(x)dx} \equiv 1$$

Si H_0 est vrai: $P\left(C.L._{min} \leq C.L. \leq C.L._{max}\right) = C.L._{max} - C.L._{min}$

Deux avantages de la statistque $C.L. = \int_{X^2}^{\infty} fdp\chi_\nu^2\left(x^2\right)dx^2$ comparée à la statistique X^2:

1 - La distribution de $C.L.$ est uniforme et donc indépendante du nombre de degrés de liberté ν.

2 - La distribution de $C.L.$ est uniforme et donc plus facile, au moins qualitativement, à vérifier.

Exemple de test de Pearson en χ^2

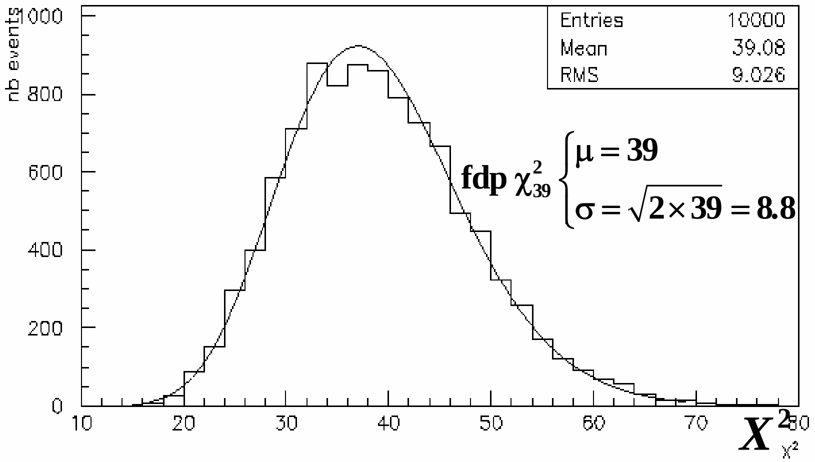
10000 échantillonsde 1000 mesures de temps de vie simulés par la méthode de Monte-Carlo suivant une exponentielle de moyenne 2μ*s*

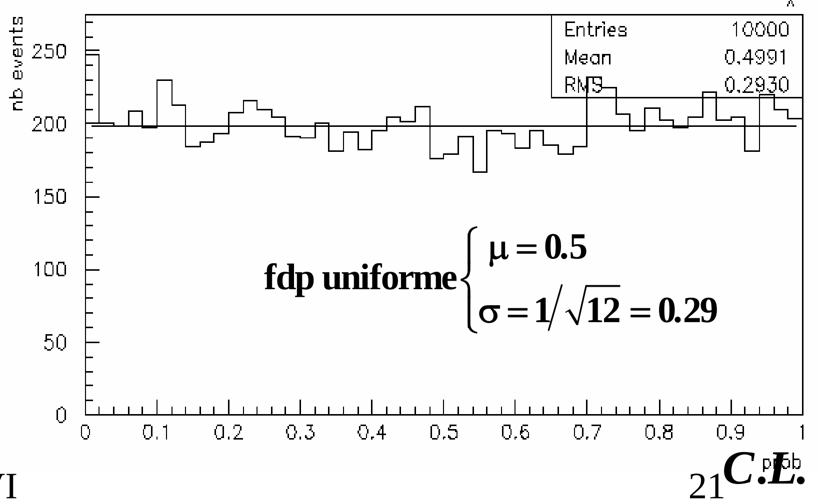
$N = 40$ classes de 25 événements

$\nu = N - 1 = 39$ degrés de liberté

$$f_0\left(t\right) = \frac{1}{2} e^{-\frac{t[\mu s]}{2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{H}_0\text{: fdp est } f_0\left(t\right) \\ \mathrm{H}_1\text{: vide} \end{array}\right\} \text{par construction}$$





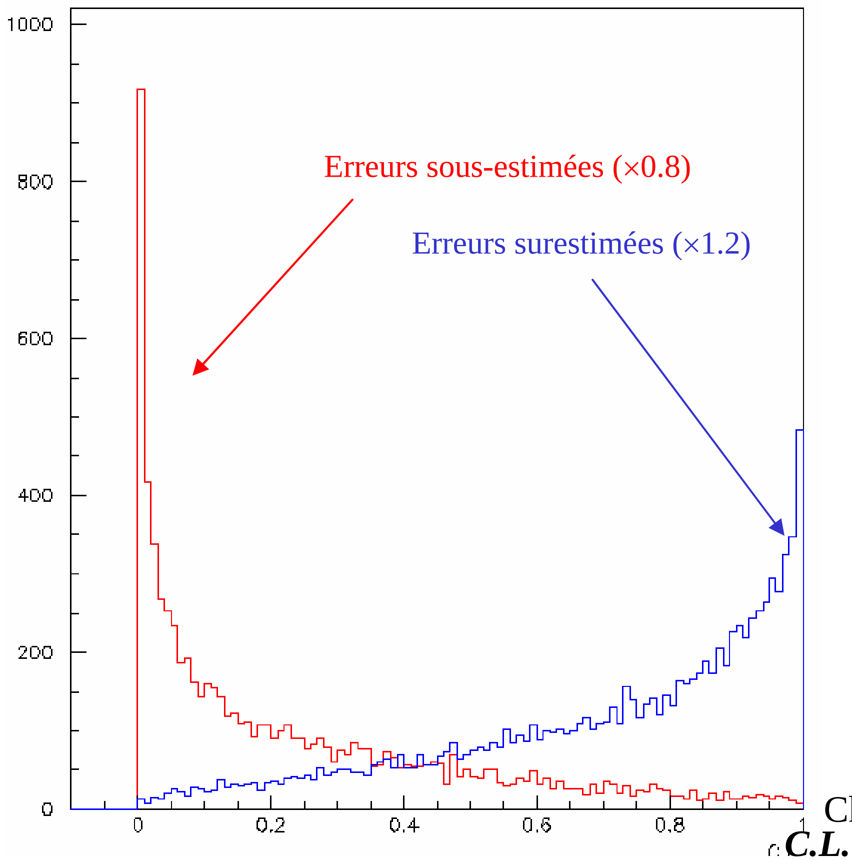
Vérification de l'estimation des erreurs de mesure

- **Si pas d'hypothèse alternative (pas d'erreur de type II) &**
- **Si asymétrie de la distribution de $C.L.$ favorisant les petites (grandes) valeurs**

$$\Downarrow$$

Erreurs de mesures sont sous(sur)estimées.

Recalibration des erreurs conduisant à une distribution de $C.L.$ accpetable.



Exemple: 10000 échantillons (similaires à celui de VI-21) de 1000 mesures de temps de vie simulés par la méthode de Monte-Carlo suivant une exponentielle.

Les erreurs sur le contenu des classes sont volontairement biaisées

Détermination a posteriori du niveau de signifiance α dans le cas d'une hypothèse alternative composite ($H_1 \equiv H_0$ est faux)

Distribution de $C.L.$: superposition $\begin{cases} \text{distribution uniforme : si } H_0 \\ \text{accumulation aux petites valeurs : si } H_1 \ \left(\text{erreur de type II}\right) \end{cases}$

Choix a posteriori de α :

– soit α_m tel que distribution de $C.L.$ est uniforme sur $\left[\alpha_m, 1\right]$

– soit N_m le nombre d'entrées sur $\left[\alpha_m, 1\right]$

– pour une série de valeurs raisonnables de $\alpha < \alpha_m$, estimer :

  – le nombre d'entrées compatibles avec H_0 sur $\left[\alpha, 1\right]$: $N_0\left(\alpha\right) = N_m \times \dfrac{1-\alpha}{1-\alpha_m}$

  – nombre effectif d'entrées sur $\left[\alpha, 1\right] = N\left(\alpha\right)$

  – puissance du test $\equiv$ pureté de l'échantillon sur $\left[\alpha, 1\right]$: $R\left(\alpha\right) = \dfrac{N_0\left(\alpha\right)}{N\left(\alpha\right)}$

$$R\left(\alpha\right) \begin{cases} \text{compatible avec 1 aux fluctuations statistiques près en l'absence de contamination par } H_1 \\ \text{décroit avec } \alpha \text{ dans le domaine contaminé par } H_1 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{compromis entre } \left\{ \begin{array}{l} \alpha \ \text{ petit : maximiser le domaine d'acceptance ; minimiser erreur de type I} \\ R\left(\alpha\right) \text{ grand : maximiser la pureté ; minimiser les erreurs de type II} \end{array} \right\}}$$

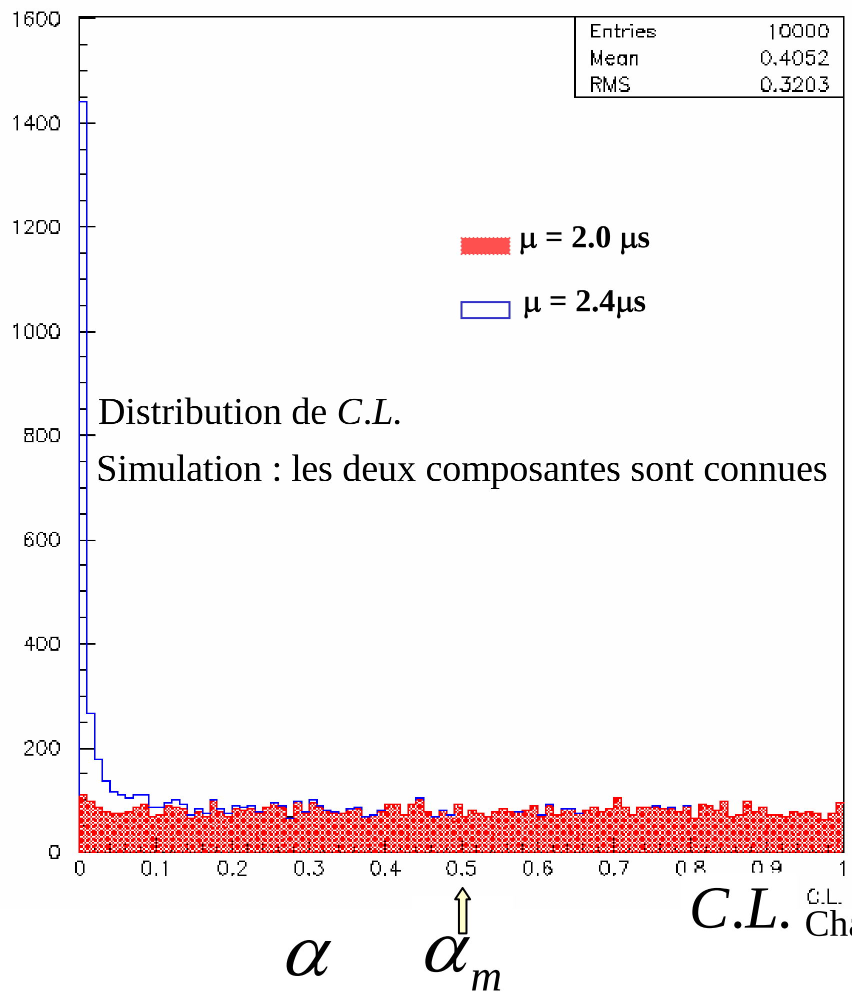
Exemple d'estimation de la pureté et de la définition a posteriori de α:

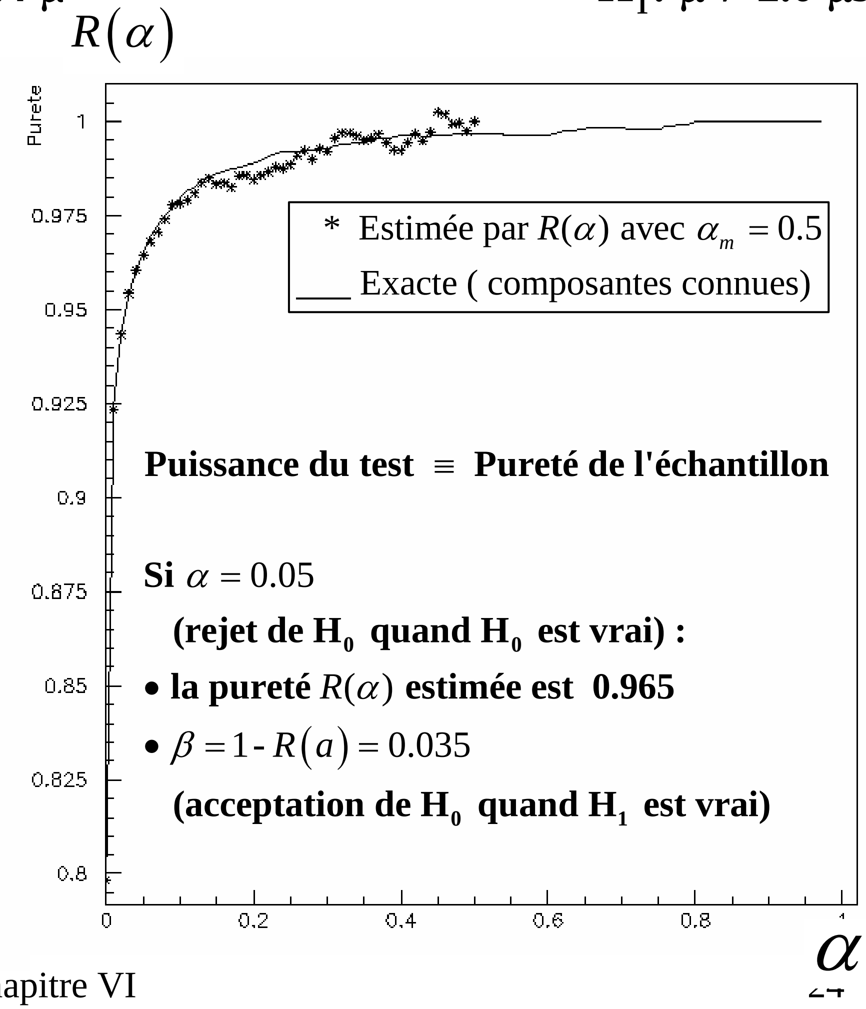
10000 échantillons de 1000 mesures de temps de vie

simulés par la méthode de Monte-Carlo suivant une exponentielle:

- 80% des échantillons : μ=2.0 μs — **H_0: μ=2.0 μs**

- 20% des échantillons : μ=2.4 μs — **H_1: $\mu \neq$ 2.0 μs**





Test de Kolmogorov-Smirnov

Test entre un échantillon et la fdp d'un modèle

Soit un échantillon de mesures $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de la variable aléatoire x

Soit $f_0(x)$ la fdp de x prédite par un modèle théorique

H_0: $\underline{x}$ est un échantillon extrait d'une population de fdp $f_0(x)$

H_1: H_0 est faux

Construction de la statistique:

- mise en ordre croissant de $\underline{x}$: $x_i \le x_{i+1} \quad \forall i = 1, n-1$

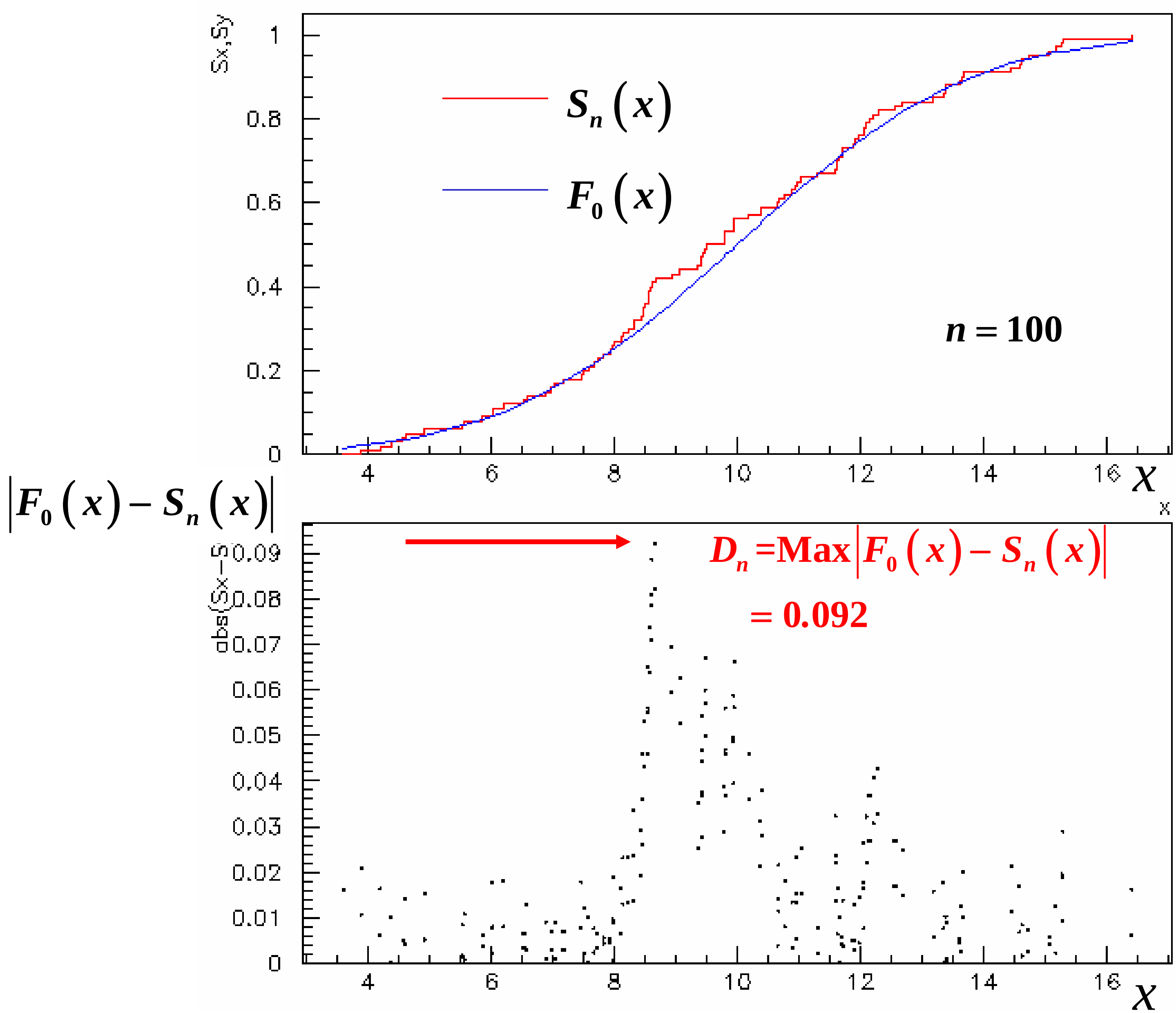
- construction de la fonction monotone croissante

$$\boxed{S_n(x)\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < x_1 \\ \dfrac{i}{n} & \text{si} \quad x_i \le x < x_{i+1} \\ 1 & \text{si} \quad x > x_n \end{cases}}$$

$$0 \le S_n(x) \le 1$$

- H_0: $S_n(x) = F_0(x) = \int_0^x f_0(x')\, dx'$

$$\boxed{\text{Statistique de test: } D_n = Max\left(\left|F_0(x) - S_n(x)\right|\right)}$$



Sx,Sy
$S_n(x)$
$F_0(x)$
$n = 100$
X
x
$\left|F_0(x) - S_n(x)\right|$
abs(Sx−S
$D_n = \mathrm{Max}\left|F_0(x) - S_n(x)\right|$
$= 0.092$
X

$$D_n = Max\left(\left|F_0(x) - S_n(x)\right|\right)$$

Kolmogorov-Smirnov: la fdp de D_n est connue et ne dépend que de n et pas de F_0

Zone critique: $F_0(x)$ trop différent de $S_n(x)$

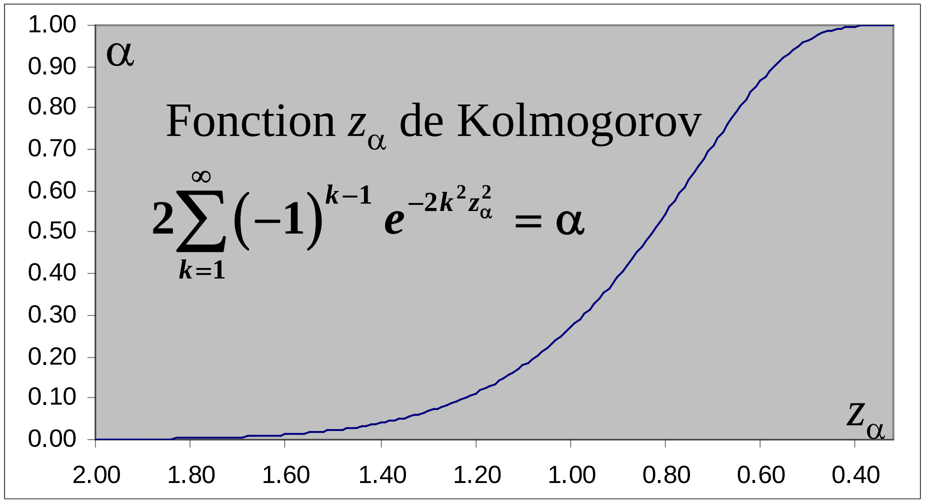
grandes valeurs de $D_n \geq d_{\alpha,n}$

Valeurs critiques

pour n petit ($n < 10$): $d_{\alpha,n}$ tabulées	**pour n grand ($n \geq 10$): $d_{\alpha,n} = \dfrac{z_\alpha}{\sqrt{n}}$**
$d_{\alpha,n}$ indépendant de F_0	**z_α indépendant de F_0 et n**

Exemple: valeur critique pour $\alpha = 0.05$ et $n = 100$?

$$z_{0.05} = 1.35 \quad \Rightarrow \quad d_{0.05,100} = \frac{1.35}{\sqrt{100}} = 0.135 > 0.092$$



Test entre deux échantillons

Soit deux échantillon de mesures $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ **et** $\underline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$

H_0: $\underline{x}$ et $\underline{y}$ sont des échantillons extraits d'une même population

H_1: H_0 est faux

Statistique:

-construction de $S_n(x)$ **et** $S_m(y)$

- $D_{m,n} = Max\left(\left|S_n(x) - S_m(y)\right|\right)$

Zone critique: $S_m(y)$ trop différent de $S_n(x)$

grandes valeurs de $D_{n,m} \geq d_{\alpha,n,m}$

Valeurs critiques: **pour n petit ($n < 10$):** $d_{\alpha,n,m} = d_{\alpha,n}\sqrt{1 + \frac{n}{m}} = d_{\alpha,m}\sqrt{1 + \frac{m}{n}}$

$$\boxed{\text{pour } n \text{ grand } (n \geq 10):\ d_{\alpha,n,m} = z_\alpha\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}$$

Exemple de test entre deux échantillons

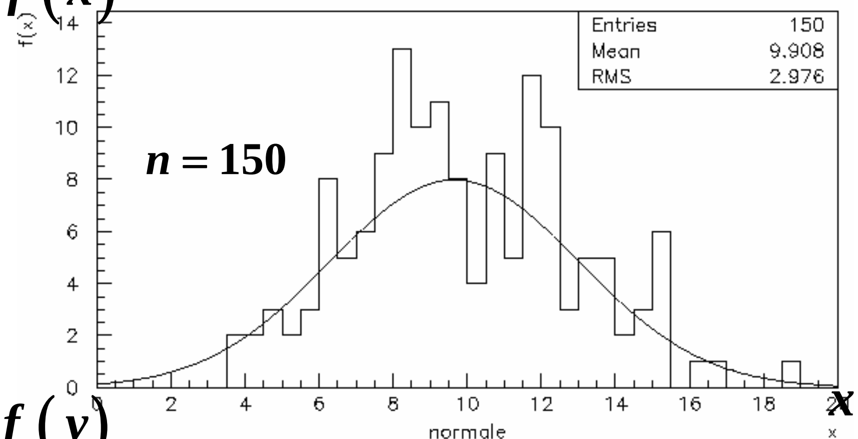
2 échantillons distribués suivant $N\left(10,9\right)$

$$D_{150,250} = Max\left(\left|S_{150}\left(x\right) - S_{250}\left(y\right)\right|\right) = 0.043$$

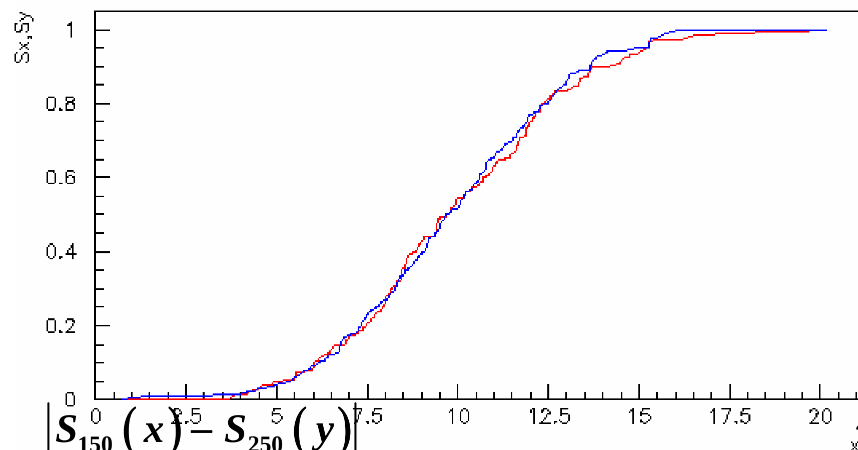
$$d_{0.05,150,250} = z_{0.05}\sqrt{\frac{1}{150}+\frac{1}{250}} = 0.162 > D_{150,250}$$

$\Rightarrow$ **H_0 est acceptée**

$f\left(x\right)$

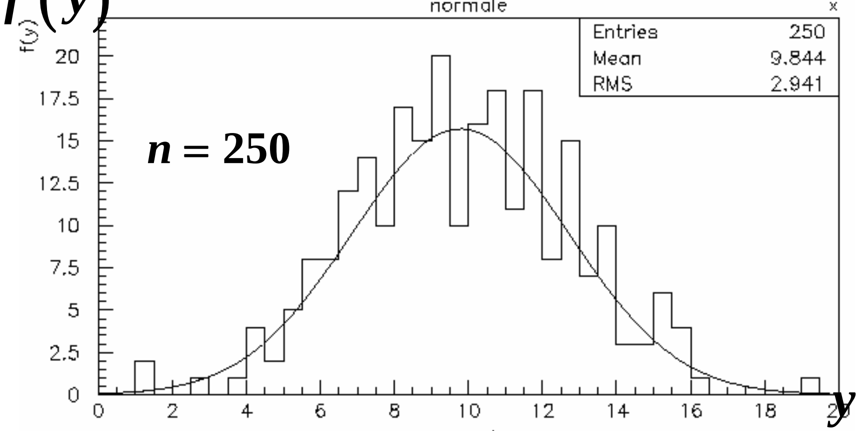


$S_{150}\left(x\right), S_{250}\left(y\right)$



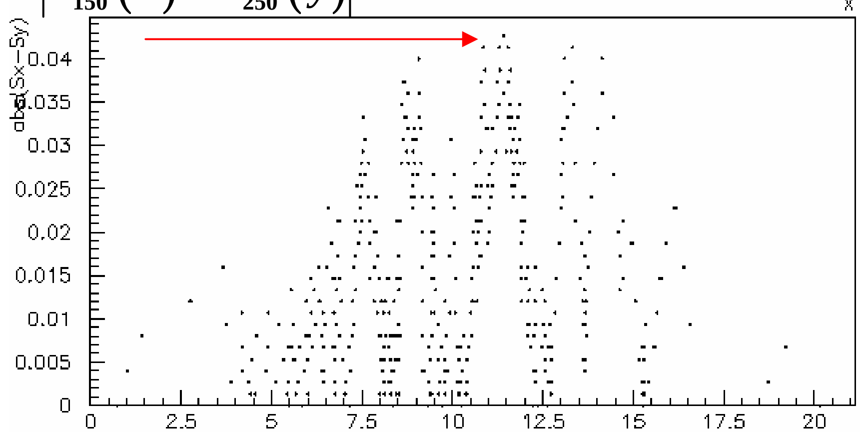
x, y

$f\left(y\right)$



y

$\left|S_{150}\left(x\right) - S_{250}\left(y\right)\right|$



x, y

Utilisation de la statistique de Kolmogorov-Smirnov pour déterminer la taille de l'échantillon nécessaire pour déterminer $F_0(x)$ à mieux d'une précision donnée sur l'ensemble de son domaine de variation avec une probabilité donnée.

Par définition, en l'absence de biais et de contamination,

tout échantillon $\underline{x}$ est extrait de la vraie distribution $F_0(x)$ et :

$$P\left(Max\left(S_n(x)-F_0(x)\right)\leq d_{\alpha,n}\right)=1-\alpha$$

$$\Rightarrow$$

$$P\left(F_0(x)\in\left[S_n(x)-d_{\alpha,n},S_n(x)+d_{\alpha,n}\right]\right)=1-\alpha \qquad \forall x$$

La vraie fonction $F_0(x)$ est comprise dans une bande $\pm d_{\alpha,n}$ autour de $S_n(x)$ avec une probabilité $1-\alpha$.

La taille n de l'échantillon menant à une bande de précision $\pm d$ avec une une probabilité $1-\alpha$ est donc:

$$\boxed{n=\left(z_\alpha / d\right)^2}$$

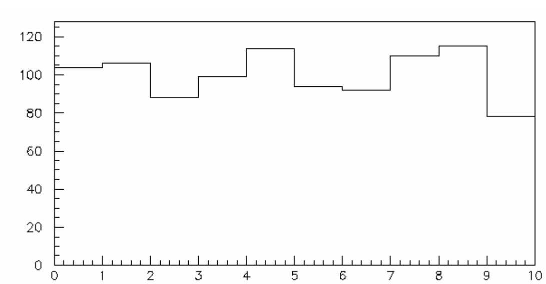
Exemple: au niveau de confiance $1-\alpha=0.9$ (α=0.1), et pour $d=\pm 0.05$ de part et d'autre de $S_n(x)$, on a:

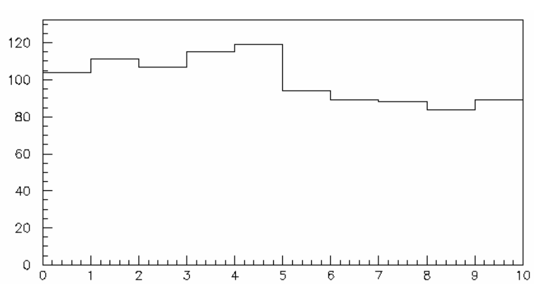
$$z_{0.1}=1.22 \;\rightarrow\; n=\left(1.22/0.05\right)^2\approx 600$$

La vraie fonction $F_0(x)$ sera comprise dans une bande ± 0.05 autour de $S_n(x)$ avec une probabilité de 0.9 si la taille de l'échantillon est de 600.

Comparaison entre les deux méthodes de test non paramétrique.

Pearson	Kolmogorov - Smirnov
Test formellement exact pour un échantillon de taille infinie.	**Test strictement exact quelle que soit la taille de l'échantillon.**
Perte d'information due à la mise en boîtes.	**Utilisation de toute l'information.**
Test basé sur le carré des différence et donc insensible au signe des différences	**Test sensible au signe des différences**
Le test est correct si *K* paramètres du modèle f_0 ont été estimés à partir de l'échantillon testé, à condition que ce soit par la méthode des moindres carrés. La *fdp* de la statistique X^2 est connue. C'est une χ^2 dont le nombre de degrés de liberté est diminué de *K*.	Le test n'est pas correct si un ou des paramètres du modèle f_0 ont été estimés à partir de l'échantillon testé. La *fdp* de la statistique D_n n'est plus connue.





- H_0 : distribution uniforme
- Même valeur de X^2 pour les deux histogrammes
- Les 5 premières boites du second ont un contenu > moyenne

Exemple de test de Pearson en χ^2 - Comparer au test de la p.20

1000 mesures de temps de vie

H_0: fdp est une exponentielle dont la moyenne $\mu = 1.9$ µs a été estimée à partir de l'échantillon par la méthode des moinfres carrés.

$\nu = N - 1 - 1 = 38$ **(1 paramètre estimé à partir de l'échantillon)**

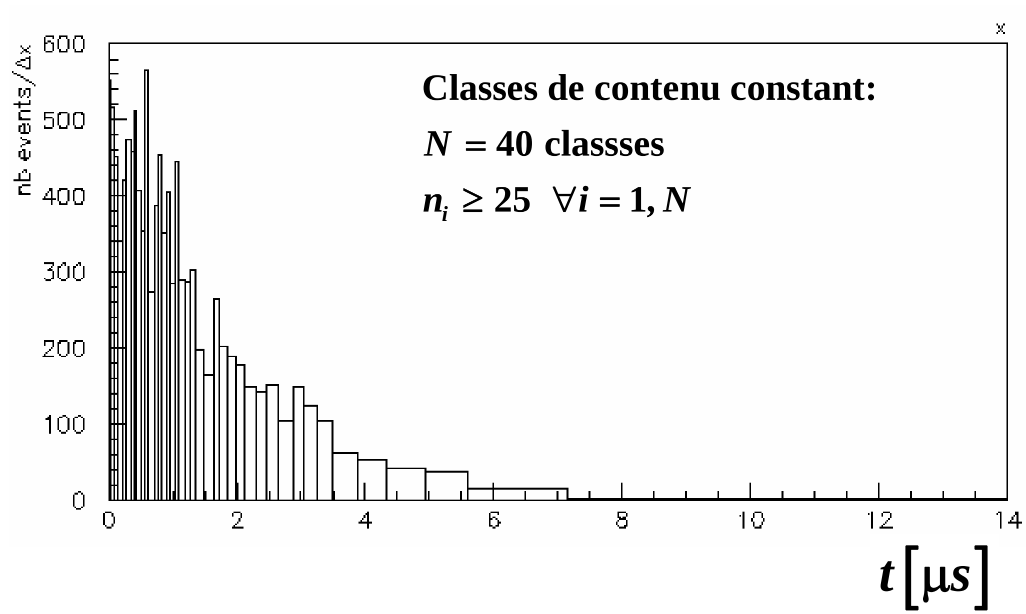
$$p_{0i} = \int_{T_i}^{T_{i+1}} \frac{1}{1.90} e^{-\frac{t[\mu s]}{1.9}} dt$$

$$X^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(n_i - np_{0i})^2}{np_{0i}} = 31.0$$

soit α=0.05

$$X^2_{0.05,38} = 54.4 > X^2 = 31.0$$

H_0 acceptée au niveau de signification de 5%



Test de Kolmogorov-Smirnov: Statistique de test z_α (α)

z_α	α	z_α	α	z_α	α	z_α	α	z_α	α	z_α	α	z_α	α	z_α	α
0.01	1.0000	0.02	1.0000	0.03	1.0000	0.04	1.0000	1.01	0.2594	1.02	0.2492	1.03	0.2392	1.04	0.2296
0.05	1.0000	0.06	1.0000	0.07	1.0000	0.08	1.0000	1.05	0.2202	1.06	0.2111	1.07	0.2024	1.08	0.1939
0.09	1.0000	0.10	1.0000	0.11	1.0000	0.12	1.0000	1.09	0.1857	1.10	0.1777	1.11	0.1700	1.12	0.1626
0.13	1.0000	0.14	1.0000	0.15	1.0000	0.16	1.0000	1.13	0.1555	1.14	0.1486	1.15	0.1420	1.16	0.1356
0.17	1.0000	0.18	1.0000	0.19	1.0000	0.20	1.0000	1.17	0.1294	1.18	0.1235	1.19	0.1177	1.20	0.1122
0.21	1.0000	0.22	1.0000	0.23	1.0000	0.24	1.0000	1.21	0.1070	1.22	0.1019	1.23	0.0970	1.24	0.0924
0.25	1.0000	0.26	1.0000	0.27	1.0000	0.28	1.0000	1.25	0.0879	1.26	0.0836	1.27	0.0794	1.28	0.0755
0.29	1.0000	0.30	1.0000	0.31	1.0000	0.32	1.0000	1.29	0.0717	1.30	0.0681	1.31	0.0646	1.32	0.0613
0.33	0.9999	0.34	0.9998	0.35	0.9997	0.36	0.9995	1.33	0.0582	1.34	0.0551	1.35	0.0522	1.36	0.0495
0.37	0.9992	0.38	0.9987	0.39	0.9981	0.40	0.9972	1.37	0.0469	1.38	0.0443	1.39	0.0420	1.40	0.0397
0.41	0.9960	0.42	0.9945	0.43	0.9926	0.44	0.9903	1.41	0.0375	1.42	0.0354	1.43	0.0335	1.44	0.0316
0.45	0.9874	0.46	0.9840	0.47	0.9800	0.48	0.9753	1.45	0.0298	1.46	0.0282	1.47	0.0266	1.48	0.0250
0.49	0.9700	0.50	0.9639	0.51	0.9572	0.52	0.9497	1.49	0.0236	1.50	0.0222	1.51	0.0209	1.52	0.0197
0.53	0.9415	0.54	0.9325	0.55	0.9228	0.56	0.9124	1.53	0.0185	1.54	0.0174	1.55	0.0164	1.56	0.0154
0.57	0.9013	0.58	0.8896	0.59	0.8772	0.60	0.8643	1.57	0.0145	1.58	0.0136	1.59	0.0127	1.60	0.0120
0.61	0.8508	0.62	0.8367	0.63	0.8222	0.64	0.8073	1.61	0.0112	1.62	0.0105	1.63	0.0098	1.64	0.0092
0.65	0.7920	0.66	0.7764	0.67	0.7604	0.68	0.7442	1.65	0.0086	1.66	0.0081	1.67	0.0076	1.68	0.0071
0.69	0.7278	0.70	0.7112	0.71	0.6945	0.72	0.6777	1.69	0.0066	1.70	0.0062	1.71	0.0058	1.72	0.0054
0.73	0.6609	0.74	0.6440	0.75	0.6272	0.76	0.6104	1.73	0.0050	1.74	0.0047	1.75	0.0044	1.76	0.0041
0.77	0.5936	0.78	0.5770	0.79	0.5605	0.80	0.5441	1.77	0.0038	1.78	0.0035	1.79	0.0033	1.80	0.0031
0.81	0.5280	0.82	0.5120	0.83	0.4962	0.84	0.4806	1.81	0.0029	1.82	0.0027	1.83	0.0025	1.84	0.0023
0.85	0.4653	0.86	0.4503	0.87	0.4355	0.88	0.4209	1.85	0.0021	1.86	0.0020	1.87	0.0018	1.88	0.0017
0.89	0.4067	0.90	0.3927	0.91	0.3791	0.92	0.3657	1.89	0.0016	1.90	0.0015	1.91	0.0014	1.92	0.0013
0.93	0.3527	0.94	0.3399	0.95	0.3275	0.96	0.3154	1.93	0.0012	1.94	0.0011	1.95	0.0010	1.96	0.0009
0.97	0.3036	0.98	0.2921	0.99	0.2809	1.00	0.2700	1.97	0.0009	1.98	0.0008	1.99	0.0007	2.00	0.0007

z	+0.00	+ 0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06	+0.07	+0.08	+0.09
0.0	0.00000	0.00798	0.01596	0.02393	0.03191	0.03988	0.04784	0.05581	0.06376	0.07171
0.1	0.07966	0.08759	0.09552	0.10343	0.11134	0.11924	0.12712	0.13499	0.14285	0.15069
0.2	0.15852	0.16633	0.17413	0.18191	0.18967	0.19741	0.20514	0.21284	0.22052	0.22818
0.3	0.23582	0.24344	0.25103	0.25860	0.26614	0.27366	0.28115	0.28862	0.29605	0.30346
0.4	0.31084	0.31819	0.32551	0.33280	0.34006	0.34729	0.35448	0.36164	0.36877	0.37587
0.5	0.38292	0.38995	0.39694	0.40389	0.41080	0.41768	0.42452	0.43132	0.43809	0.44481
0.6	0.45149	0.45814	0.46474	0.47131	0.47783	0.48431	0.49075	0.49714	0.50350	0.50981
0.7	0.51607	0.52230	0.52847	0.53461	0.54070	0.54675	0.55275	0.55870	0.56461	0.57047
0.8	0.57629	0.58206	0.58778	0.59346	0.59909	0.60467	0.61021	0.61570	0.62114	0.62653
0.9	0.63188	0.63718	0.64243	0.64763	0.65278	0.65789	0.66294	0.66795	0.67291	0.67783
1.0	0.68269	0.68750	0.69227	0.69699	0.70166	0.70628	0.71086	0.71538	0.71986	0.72429
1.1	0.72867	0.73300	0.73729	0.74152	0.74571	0.74986	0.75395	0.75800	0.76200	0.76595
1.2	0.76986	0.77372	0.77754	0.78130	0.78502	0.78870	0.79233	0.79592	0.79945	0.80295
1.3	0.80640	0.80980	0.81316	0.81648	0.81975	0.82298	0.82617	0.82931	0.83241	0.83547
1.4	0.83849	0.84146	0.84439	0.84728	0.85013	0.85294	0.85571	0.85844	0.86113	0.86378
1.5	0.86639	0.86896	0.87149	0.87398	0.87644	0.87886	0.88124	0.88358	0.88589	0.88817
1.6	0.89040	0.89260	0.89477	0.89690	0.89899	0.90106	0.90309	0.90508	0.90704	0.90897
1.7	0.91087	0.91273	0.91457	0.91637	0.91814	0.91988	0.92159	0.92327	0.92492	0.92655
1.8	0.92814	0.92970	0.93124	0.93275	0.93423	0.93569	0.93711	0.93852	0.93989	0.94124
1.9	0.94257	0.94387	0.94514	0.94639	0.94762	0.94882	0.95000	0.95116	0.95230	0.95341
2.0	0.95450	0.95557	0.95662	0.95764	0.95865	0.95964	0.96060	0.96155	0.96247	0.96338
2.1	0.96427	0.96514	0.96599	0.96683	0.96765	0.96844	0.96923	0.96999	0.97074	0.97148
2.2	0.97219	0.97289	0.97358	0.97425	0.97491	0.97555	0.97618	0.97679	0.97739	0.97798
2.3	0.97855	0.97911	0.97966	0.98019	0.98072	0.98123	0.98172	0.98221	0.98269	0.98315
2.4	0.98360	0.98405	0.98448	0.98490	0.98531	0.98571	0.98611	0.98649	0.98686	0.98723
2.5	0.98758	0.98793	0.98826	0.98859	0.98891	0.98923	0.98953	0.98983	0.99012	0.99040
2.6	0.99068	0.99095	0.99121	0.99146	0.99171	0.99195	0.99219	0.99241	0.99264	0.99285
2.7	0.99307	0.99327	0.99347	0.99367	0.99386	0.99404	0.99422	0.99439	0.99456	0.99473
2.8	0.99489	0.99505	0.99520	0.99535	0.99549	0.99563	0.99576	0.99590	0.99602	0.99615
2.9	0.99627	0.99639	0.99650	0.99661	0.99672	0.99682	0.99692	0.99702	0.99712	0.99721
3.0	0.99730	0.99739	0.99747	0.99755	0.99763	0.99771	0.99779	0.99786	0.99793	0.99800
3.1	0.99806	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99837	0.99842	0.99848	0.99853	0.99858
3.2	0.99863	0.99867	0.99872	0.99876	0.99880	0.99885	0.99889	0.99892	0.99896	0.99900
3.3	0.99903	0.99907	0.99910	0.99913	0.99916	0.99919	0.99922	0.99925	0.99928	0.99930
3.4	0.99933	0.99935	0.99937	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950	0.99952
3.5	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99963	0.99964	0.99966	0.99967
3.6	0.99968	0.99969	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976	0.99977	0.99978
3.7	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99982	0.99982	0.99983	0.99984	0.99984	0.99985
3.8	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989	0.99989	0.99990	0.99990
3.9	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99993	0.99993	0.99993	0.99993

Distribution Normale (0.,1.)

$$\int_{-z}^{z} N\left(z \mid 0.,1.\right) dz$$

n	$t_{0.100}$	$t_{0.200}$	$t_{0.300}$	$t_{0.400}$	$t_{0.500}$	$t_{0.600}$	$t_{0.700}$	$t_{0.800}$	$t_{0.900}$	$t_{0.950}$	$t_{0.975}$	$t_{0.990}$	$t_{0.995}$	$t_{0.999}$
1	0.158	0.325	0.510	0.727	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	25.454	63.656	127.319	179.261
2	0.142	0.289	0.445	0.617	0.817	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.205	9.925	14.089	31.728
3	0.137	0.277	0.424	0.584	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.177	5.841	7.453	12.924
4	0.134	0.271	0.414	0.569	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.495	4.604	5.598	8.610
5	0.132	0.267	0.408	0.559	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.163	4.032	4.773	6.869
6	0.131	0.265	0.404	0.553	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	2.969	3.707	4.317	5.959
7	0.130	0.263	0.402	0.549	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.841	3.499	4.029	5.408
8	0.130	0.262	0.399	0.546	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.752	3.355	3.833	5.041
9	0.129	0.261	0.398	0.543	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.685	3.250	3.690	4.781
10	0.129	0.260	0.397	0.542	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.634	3.169	3.581	4.587
11	0.129	0.260	0.396	0.540	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.593	3.106	3.497	4.437
12	0.128	0.259	0.395	0.539	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.560	3.055	3.428	4.318
13	0.128	0.259	0.394	0.538	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.533	3.012	3.373	4.221
14	0.128	0.258	0.393	0.537	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.510	2.977	3.326	4.140
15	0.128	0.258	0.393	0.536	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.490	2.947	3.286	4.073
16	0.128	0.258	0.392	0.535	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.473	2.921	3.252	4.015
17	0.128	0.257	0.392	0.534	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.458	2.898	3.222	3.965
18	0.127	0.257	0.392	0.534	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.093	2.433	2.861	3.153	3.849
21	0.127	0.257	0.391	0.532	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.414	2.831	3.135	3.819
22	0.127	0.256	0.390	0.532	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.405	2.819	3.119	3.792
23	0.127	0.256	0.390	0.532	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.398	2.807	3.104	3.768
24	0.127	0.256	0.390	0.531	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.391	2.797	3.091	3.745
25	0.127	0.256	0.390	0.531	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.385	2.787	3.078	3.725
26	0.127	0.256	0.390	0.531	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.379	2.779	3.067	3.707
27	0.127	0.256	0.389	0.531	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.373	2.771	3.057	3.690
28	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.368	2.763	3.047	3.674
29	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.364	2.756	3.038	3.659
30	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.360	2.750	3.030	3.646
40	0.126	0.255	0.388	0.529	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.329	2.704	2.971	3.551
50	0.126	0.255	0.388	0.528	0.679	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.311	2.678	2.937	3.496
60	0.126	0.254	0.387	0.527	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.299	2.660	2.915	3.460

Distribution de Student à n d.d.l.

$$\alpha = \int_{-t_\alpha}^{t_\alpha} f\left(t \mid n\right) dt$$

n	$\chi^2_{0.100}$	$\chi^2_{0.100}$	$\chi^2_{0.300}$	$\chi^2_{0.400}$	$\chi^2_{0.500}$	$\chi^2_{0.600}$	$\chi^2_{0.700}$	$\chi^2_{0.800}$	$\chi^2_{0.900}$	$\chi^2_{0.950}$	$\chi^2_{0.975}$	$\chi^2_{0.990}$	$\chi^2_{0.995}$	$\chi^2_{0.999}$
2	0.212	0.448	0.715	1.024	1.389	1.836	2.412	3.224	4.616	6.012	7.419	9.313	10.807	0.000
3	0.584	1.005	1.424	1.869	2.366	2.947	3.665	4.642	6.251	7.815	9.348	11.340	12.825	16.246
4	1.063	1.649	2.195	2.753	3.357	4.045	4.879	5.989	7.780	9.488	11.144	13.277	14.861	18.468
5	1.610	2.342	3.000	3.656	4.352	5.132	6.065	7.289	9.237	11.071	12.833	15.087	16.751	20.523
6	2.204	3.070	3.828	4.570	5.348	6.211	7.231	8.558	10.645	12.592	14.450	16.812	18.548	22.458
7	2.833	3.822	4.671	5.493	6.346	7.283	8.384	9.803	12.017	14.067	16.013	18.476	20.278	24.322
8	3.489	4.594	5.527	6.423	7.344	8.351	9.525	11.030	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955	26.125
9	4.168	5.380	6.393	7.357	8.343	9.414	10.657	12.242	14.684	16.919	19.023	21.666	23.590	27.878
10	4.865	6.179	7.267	8.295	9.342	10.473	11.781	13.442	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188	29.589
11	5.578	6.989	8.148	9.237	10.341	11.530	12.899	14.632	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757	31.265
12	6.304	7.807	9.034	10.182	11.340	12.584	14.011	15.812	18.550	21.026	23.337	26.217	28.300	32.910
13	7.041	8.634	9.926	11.129	12.340	13.636	15.119	16.985	19.812	22.362	24.736	27.688	29.820	34.529
14	7.789	9.467	10.821	12.078	13.339	14.685	16.222	18.151	21.064	23.685	26.119	29.142	31.320	36.124
15	8.546	10.307	11.721	13.030	14.339	15.733	17.322	19.311	22.307	24.996	27.489	30.578	32.801	37.698
16	9.312	11.152	12.624	13.983	15.339	16.780	18.418	20.465	23.542	26.296	28.846	32.000	34.268	39.253
17	10.085	12.002	13.531	14.937	16.338	17.824	19.511	21.615	24.769	27.587	30.191	33.409	35.719	40.790
18	10.865	12.857	14.440	15.893	17.338	18.868	20.601	22.760	25.990	28.870	31.527	34.805	37.157	42.313
19	11.651	13.716	15.352	16.850	18.338	19.910	21.689	23.900	27.204	30.144	32.853	36.191	38.583	43.821
20	12.442	14.578	16.266	17.809	19.337	20.951	22.775	25.038	28.412	31.411	34.170	37.566	39.997	45.315
21	13.239	15.444	17.182	18.768	20.337	21.992	23.858	26.171	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401	46.797
22	14.041	16.314	18.101	19.729	21.337	23.031	24.939	27.301	30.813	33.925	36.781	40.290	42.796	48.269
23	14.848	17.186	19.021	20.690	22.337	24.069	26.018	28.429	32.007	35.173	38.076	41.639	44.182	49.729
24	15.658	18.062	19.943	21.652	23.337	25.106	27.096	29.553	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559	51.179
25	16.473	18.940	20.867	22.616	24.337	26.143	28.172	30.675	34.382	37.653	40.647	44.314	46.928	52.620
26	17.292	19.820	21.792	23.579	25.336	27.179	29.246	31.795	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290	54.052
27	18.114	20.703	22.719	24.544	26.336	28.214	30.319	32.912	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645	55.477
28	18.939	21.588	23.647	25.509	27.336	29.249	31.391	34.027	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993	56.892
29	19.768	22.475	24.577	26.475	28.336	30.283	32.461	35.139	39.088	42.557	45.722	49.588	52.336	58.301
30	20.599	23.364	25.508	27.442	29.336	31.316	33.530	36.250	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672	59.704
40	29.050	32.345	34.872	37.134	39.335	41.622	44.165	47.269	51.805	55.759	59.342	63.691	66.766	73.402

Distribution χ^2

à n d.d.l.

$$\alpha = \int_0^{\chi^2_\alpha} f\left(x^2 \mid n\right) dx^2$$