II - Notions de probabilité

• Une variable aléatoire est une variable dont la valeur ne peut être prédite avec certitude mais dont la probabilité d'occurrence d'une valeur (variable discrète) ou d'un domaine de valeurs (variable continue) est connue.

• Un processus aléatoire est décrit par une ou plusieurs variables aléatoires.

Axiomes de base du calcul des probabilités

1/ $0 \leq P(x) \leq 1$

si x certainement vrai: $P(x) = 1$

si x certainement faux: $P(x) = 0$

2/ Addition et exclusion

$$P(x \cup y) = P(x) + P(y) - P(x \cap y)$$

si x et y sont exclusifs: $P(x \cap y) = 0$

$$P(x \cup y) = P(x) + P(y)$$

3/ Multiplication et indépendance

$$P(x \cap y) = P(x) \times P(y \mid x) = P(y) \times P(x \mid y)$$

si x et y sont indépendants: $P(x \mid y) = P(x)$

$$P(y \mid x) = P(y)$$

$$P(x \cap y) = P(x) \times P(y)$$

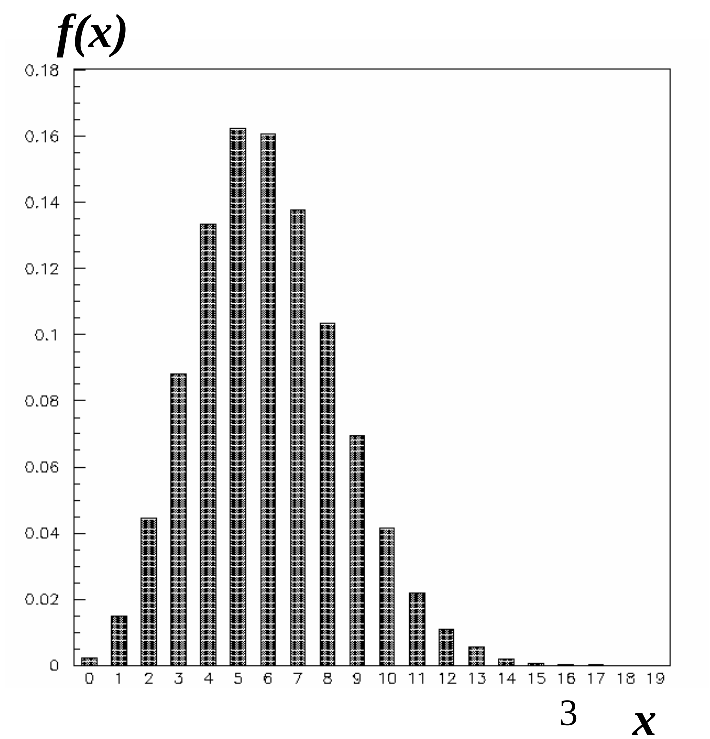
Fonctions de fréquence, de densité de probabilité, de distribution, caractéristique

• Fonction de fréquence d’une variable discrète

∘ **Soit une population finie de n éléments caractérisés par une propriété (variable) x pouvant prendre k valeurs possibles $x_1, x_2, \ldots x_k$**

exemple: taille exprimée en cm mesurée au mm près d'une population

∘ **Soit $n_i, i = 1, k$ le nombre d'occurences de la valeur x_i**



∘ $f(x_i) = p_i = \dfrac{n_i}{n}$ $\qquad \displaystyle\sum_{i=1}^{k} n_i = n$

∘ **Normalisation** $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$

∘ **Cas d'une population infinie**

$$f(x_i) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_i}{n}$$

exemple : jet d'un dé

• Fonction de densité de probabilité (fdp) d'une variable continue

Exemple: spectre d'émission en longueur d'onde d'un scintillatteur organique

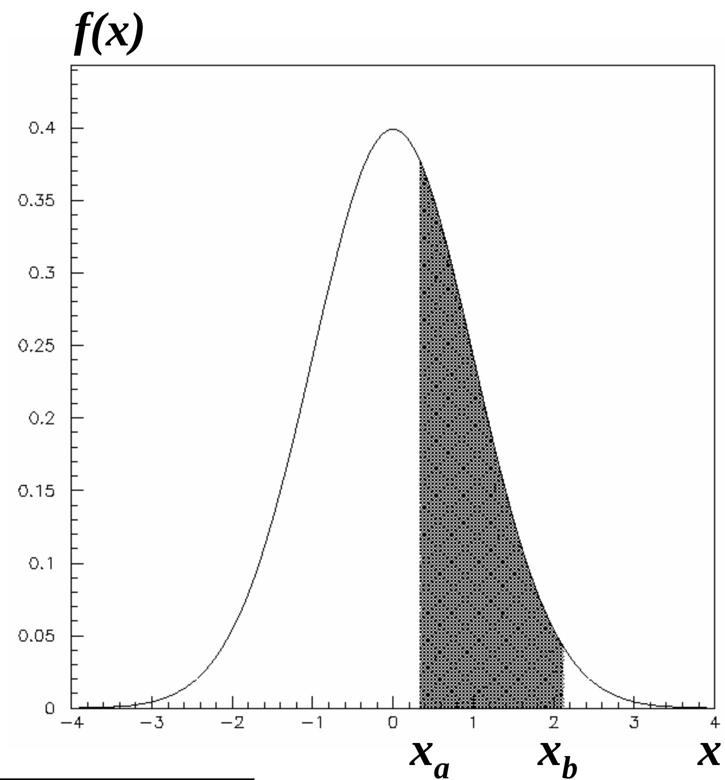
∘ $f\left(x_i\right) = lim_{\Delta x \to 0} P\left(x_i \le x < x_i + \Delta x\right) / \Delta x$

∘ $f\left(x_i\right)dx = P\left(x_i \le x < x_i + dx\right) = P\left(\left[x_i, x_i + dx\right]\right)$

∘ **Normalisation : la probabilité totale = 1**

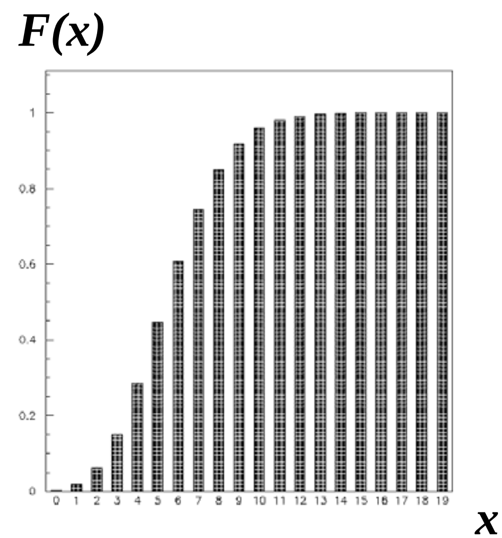
$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right) dx = 1$$

∘ $P\left(x_a \le x < x_b\right) = \int_{x_a}^{x_b} f\left(x\right) dx$



Suite du cours: fonction de densité de probabilité ou fdp pour des variables continues et des variables discrètes

• Fonction de distribution

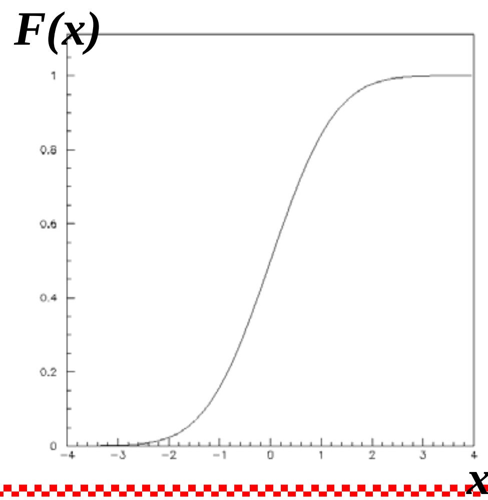


∘ variable discrète pouvant prendre n valeurs:

$$F\left(x_i\right)=\sum_{j=1}^{i} f\left(x_j\right) \quad i=1,n$$

∘ variable continue $F\left(x\right)=\int_{-\infty}^{x} f\left(y\right)dy$

$$dF\left(x\right)=f\left(x\right)dx$$



∘ $F\left(-\infty\right)=0\leq F\left(x\right)\leq\left(+\infty\right)=1$

en pratique $F\left(x\right)=0 \quad \forall x\leq x_{min}$

$$F\left(x\right)=1 \quad \forall x\geq x_{max}$$

• Fonction caractéristique

∘ $\phi\left(t\right)=E\left[e^{itx}\right]=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f\left(x\right)dx$

Transformée de Fourrier de la fdp

∘ $f\left(x\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\phi\left(t\right)dt$

∘ $\phi_\alpha\left(x\right)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\left(x-\alpha\right)} f\left(x\right)dx$

Espérance mathématique, moments non-centrés et centrés

- **Espérance mathématique: moyenne pondérée par la fdp**

$$E\left[g(x)\right]=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\; f(x)\,dx \qquad E\left[\sum_{i=1}^{n} a_i\; g_i(x)\right]=\sum_{i=1}^{n} a_i\; E\left[g_i(x)\right]$$

- **Moments non-centrés**

$$\boxed{\mu_k = E\left[x^k\right]} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \; f(x)\,dx$$

moyenne $\mu_1 = \boxed{\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \; f(x)\,dx}$

- **Moments centrés**

$$\boxed{m_k = E\left[(x-\mu)^k\right]} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^k \; f(x)\,dx$$

variance $m_2 = \boxed{\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \; f(x)\,dx}$

$$\boxed{\sigma^2 = \mu_2 - \mu^2 = E\left[x^2\right] - \left(E\left[x\right]\right)^2}$$

déviation standard, écart type: $\sigma=\sqrt{\sigma^2}$

- **Relation avec la fonction caractéristique**

$$\frac{\partial^k \phi(t)}{\partial t^k} = \frac{\partial^k}{\partial t^k}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, f(x)\,dx = i^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{itx}\, f(x)\,dx \;\Rightarrow\; \boxed{\mu_k = i^{-k} \left.\frac{\partial^k \phi(t)}{\partial t^k}\right|_{t=0}} \text{ et } \boxed{\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k (it)^k}{k\,!}}$$

puisque $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k\,!}$

de même $\boxed{m_k = i^{-k} \left.\frac{\partial^k \phi_\mu(t)}{\partial t^k}\right|_{t=0}}$

Equivalence entre la fonction de densité de probabilité $f(x)$

ou la fonction de distribution $F(x)$ $\qquad f(x) = d_x F(x)$

ou la fonction caractéristique $\phi(t)$ $\qquad f(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\phi(t)\,dt$

ou tous les moment μ_k **non nuls** $\qquad f(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mu_k (it)^k}{k!}\,dt$

La plupart des fdp décrivant les grandes classes de processus aléatoires sont déterminées par leur forme analytique et les valeurs de μ et σ^2.

- **Soient un ensemble de variables aléatoires indépendantes** $x_i \quad i = 1, n$ **distribuées suivant des fdp de moyenne** μ_i **et variance** σ_i^2

si $\qquad y = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b$

alors $\qquad \mu_y = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i + b$

et $\qquad \sigma_y^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2 \qquad$ **et non** $\sigma = \sum_{i=1}^{n} a_i\, \sigma_i$

Distribution de plusieurs variables aléatoires x_i ,$i=1,n$

Fonction de densité de probabilité jointe

$$f\left(x_1, x_2, ...x_n\right) dx_1 dx_2 ...dx_n = f\left(\underline{x}\right) d\underline{x} = P\left(\left[\underline{x}, \underline{x} + d\underline{x}\right]\right)$$

normalisation $\int_{\Omega} f\left(\underline{x}\right) d\underline{x} = 1$

moyennes $\mu_i = E\left[x_i\right] = \int_{\Omega} x_i \; f\left(\underline{x}\right) d\underline{x}$

variances $\sigma_i^2 = E\left[\left(x_i - \mu_i\right)^2\right] = \int_{\Omega} \left(x_i - \mu_i\right)^2 \; f\left(\underline{x}\right) d\underline{x}$

covariances $\boxed{\sigma_{ij} = V_{ij} = cov(x_i, x_j) = E\left[\left(x_i - \mu_i\right)\left(x_j - \mu_j\right)\right]} = \int_{\Omega} \left(x_i - \mu_i\right)\left(x_j - \mu_j\right) f\left(\underline{x}\right) d\underline{x}$

de même que $\sigma^2 = E\left[x^2\right] - \left(E\left[x\right]\right)^2$ on a $\boxed{\sigma_{ij} = E\left[x_i \cdot x_j\right] - E\left[x_i\right] \; E\left[x_j\right]}$

indépendance des variables x_i et x_j

factorisation $f\left(\underline{x}\right) = f_i\left(x_i, ...x_{k \neq j}\right) \cdot f_j\left(x_j, ...x_{k \neq i}\right)$

$$\Rightarrow \; E\left[x_i \cdot x_j\right] = E\left[x_i\right] \; E\left[x_j\right] \; \Rightarrow \; \sigma_{ij} = 0$$

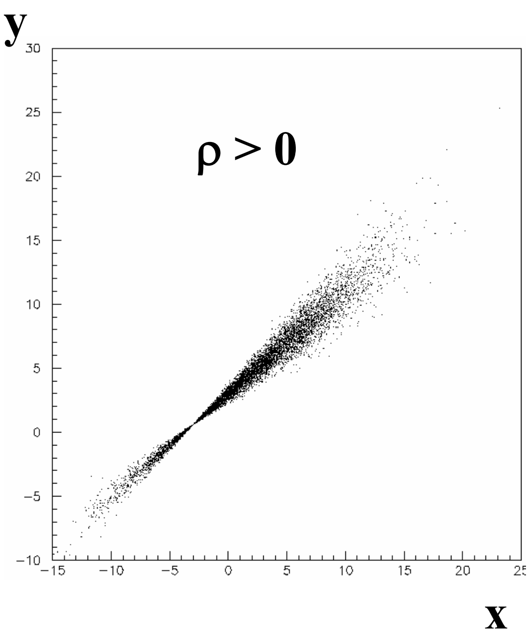
le fait que x_i prenne une valeur particulière parmi ses valeurs possibles n'affecte pas la probabilité qu'à x_j de prendre une parmi ses valeurs possibles.

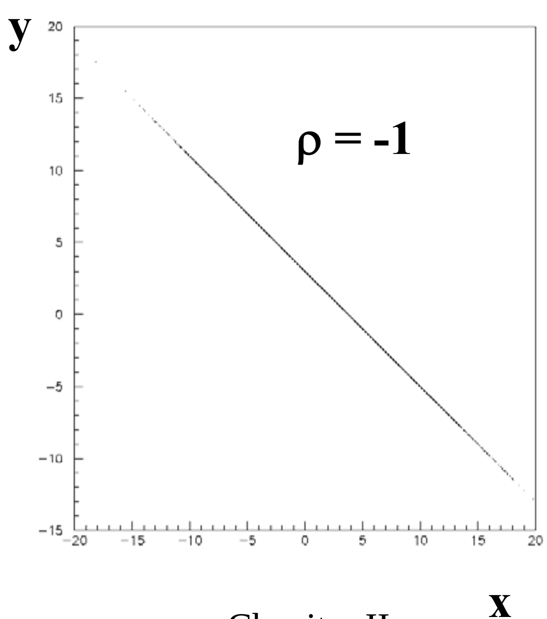
• **coefficient de corrélation entre variables x_i et x_j**

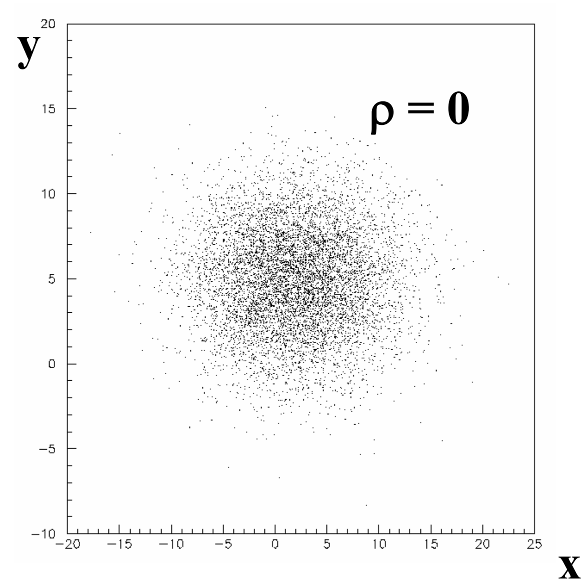
$$\boxed{\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} = \frac{E\left[\left(x_i - \mu_i\right)\left(x_j - \mu_j\right)\right]}{\sqrt{E\left[\left(x_i - \mu_i\right)^2\right] E\left[\left(x_j - \mu_j\right)^2\right]}}}$$

si indépendance: $\sigma_{ij} \Rightarrow \rho_{ij} = 0$

si dépendance linéaire: $x_j = a\, x_i + b \quad \Rightarrow \quad \mu_j = a \mu_i + b \quad \Rightarrow \quad \left|\rho_{ij}\right| = 1$







Fonction de densité marginale

cas de 2 variables, extension triviale au cas de n variables

- **projection de $f(x_1, x_2)$ sur les axe x_1 et x_2**

$$h_1(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\, dx_2 \quad \text{et} \quad h_2(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\, dx_1$$

si x_1 et x_2 sont indépendantes: $f(x_1, x_2) = f_1(x_1)\, f_2(x_2) \;\Rightarrow\; h_i(x_i) \equiv f_i(x_i)$

Fonction de densité conditionnelle

- **fdp de x_1 pour la valeur particulière x_2^0 prise par x_2 et réciproquement**

$$g_1(x_1 \mid x_2 = x_2^0) = \frac{f(x_1, x_2^0)}{h_2(x_2^0)} \quad \text{et} \quad g_2(x_2 \mid x_1 = x_1^0) = \frac{f(x_1^0, x_2)}{h_1(x_1^0)}$$

- **si x_1 et x_2 sont indépendantes: $f(x_1, x_2) = f_1(x_1)\, f_2(x_2)$ et $h_i(x_i) \equiv f_i(x_i)$**

$$\Rightarrow g_1(x_1 \mid x_2 = x_2^0) \equiv f_1(x_1) \equiv h_1(x_1)$$
$$\Rightarrow g_2(x_2 \mid x_1 = x_1^0) \equiv f_2(x_2) \equiv h_2(x_2)$$

Fonction caractéristique

$$\phi\left(t_1, t_2, \ldots t_n\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} e^{it_1 x_1 + it_2 x_2 + \ldots . it_n x_n} f\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right) dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

Variables indépendantes: factorisation de la fonction caractéristique

$$f\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right) = f_1\left(x_1\right) f_2\left(x_2\right) \ldots f_n\left(x_n\right) \rightarrow$$

$$\boxed{\phi\left(t_1, t_2, \ldots t_n\right) = \phi_1\left(t_1\right)\phi_2\left(t_2\right)\ldots\phi_n\left(t_n\right) \quad \text{avec } \phi_k(t_k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it_k x_k} f_k\left(x_k\right) dx_k}$$

Changement de variable

- **soit x distribué suivant $f(x)$**

  soit y distribué suivant $f'(y)$

  soit $y = y(x)$ une transformation bijective entre x et y

- **Conservation de la probabilité:**

  $$f(x)\,dx = f'(y)\,dy$$

$$\boxed{f'(y) = f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|}$$

- **Cas général de n variables**

$$\boxed{\begin{array}{l} f'(y_1, y_2, \ldots y_n) = |J|\, f(x_1, x_2, \ldots x_n) \\ J_{ij} = \dfrac{\partial x_i}{\partial y_j} \end{array}}$$