

## **X – Cas pathologiques d'estimation des intervalles de confiance :**

- Signal caractérisé par un petit nombre d'événements, compatible avec le bruit de fond attendu**
- Variable prenant une valeur à proximité de la limite physique.**

## Approche classique (ou fréquentiste ou de Neyman) de la définition de l'intervalle de confiance pour la mesure d'une variable continue (rappel)

**Soient:**

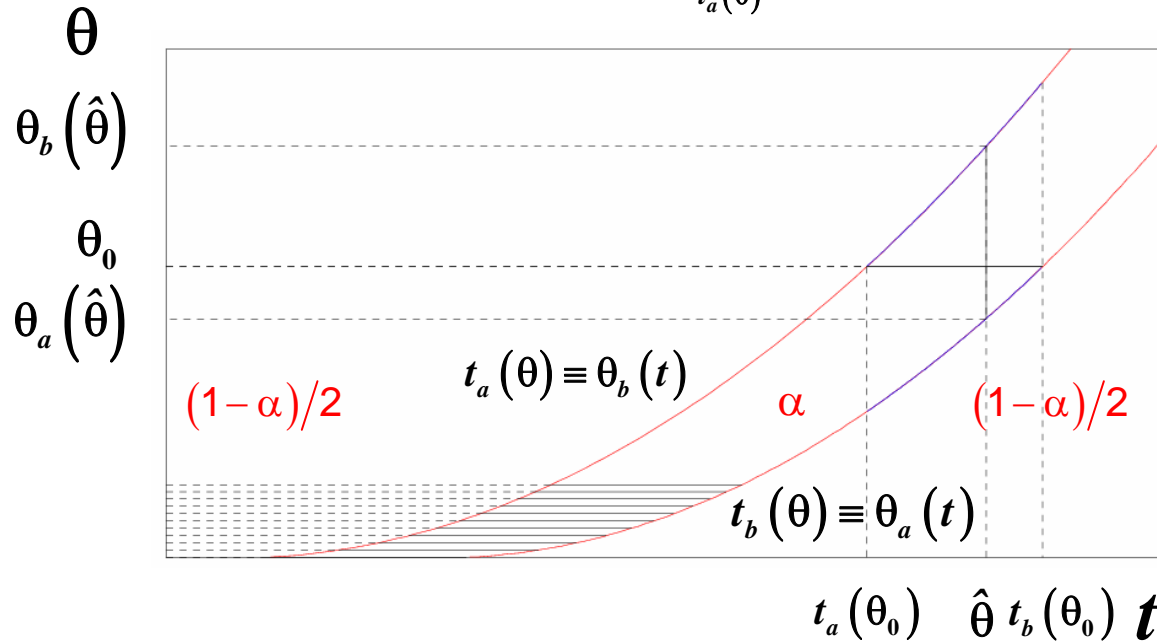
- un échantillon de mesures  $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  extrait de la population  $f(x/\theta_0)$
- estimateur  $t(\underline{x})$  de  $\theta_0$
- estimation  $\hat{\theta} = t(\underline{x})$  de  $\theta_0$  pour échantillon  $\underline{x}$  observé
- fdp  $g(t/\theta)$  de  $t$  pour une valeur  $\theta$  donnée

**La connaissance de  $g(t/\theta)$  est capitale dans la réalisation d'une mesure.**

# Ceinture de confiance de Neyman centrée sur la vraie valeur

Calculer pour un nombre fini de valeurs de  $\theta$  dans le domaine attendu

les contours  $t_a(\theta)$  et  $t_b(\theta) \Rightarrow \int_{t_a(\theta)}^{t_b(\theta)} g(t/\theta) dt = \alpha$  et  $\int_{-\infty}^{t_a(\theta)} g(t/\theta) dt = \int_{t_b(\theta)}^{\infty} g(t/\theta) dt = \frac{1-\alpha}{2}$



$$P(\hat{\theta} \in [t_a(\theta_0), t_b(\theta_0)]) = \alpha$$

dans  $\alpha\%$  des cas, l'affirmation  $\theta_0 \in [\theta_a(\hat{\theta}), \theta_b(\hat{\theta})]$  est aléatoirement vraie

dans  $(1-\alpha)\%$  des cas, l'affirmation  $\theta_0 \in [\theta_a(\hat{\theta}), \theta_b(\hat{\theta})]$  est aléatoirement fausse

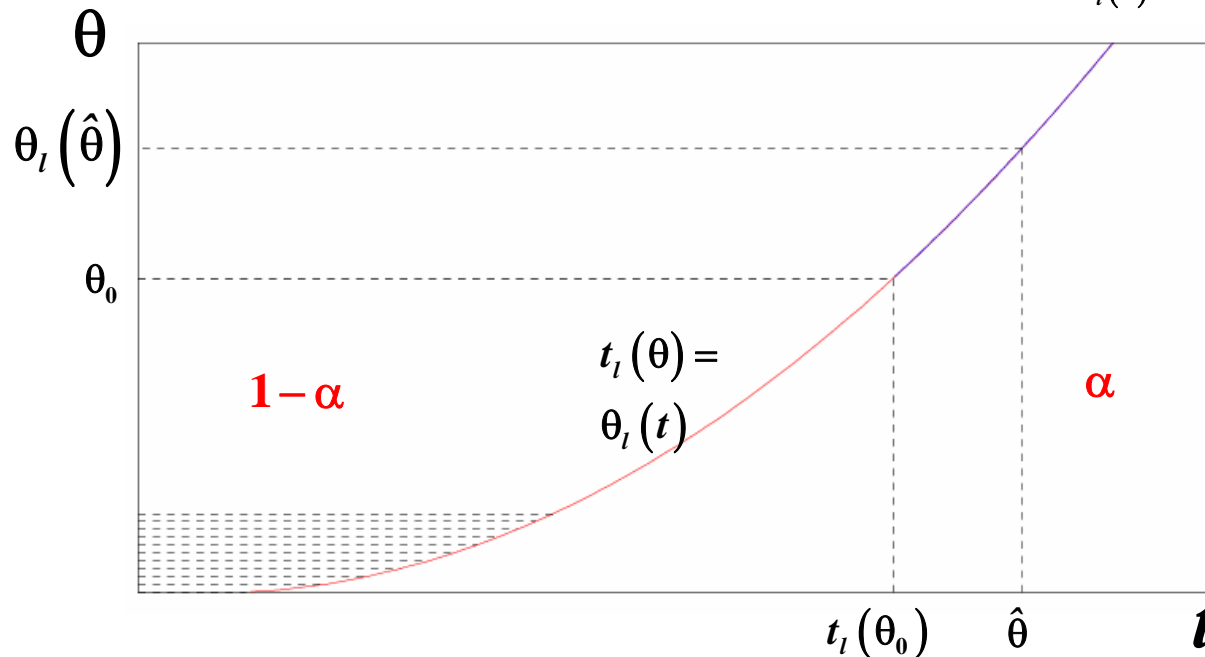
$\alpha$  = niveau de confiance (C.L.)

$[\theta_a, \theta_b]$  = intervalle de confiance au niveau de confiance  $\alpha$

# Ceinture de confiance de Neyman pour une limite supérieure

Calculer pour un nombre fini de valeurs de  $\theta$  dans le domaine attendu

le contour  $t_l(\theta) \Rightarrow \int_{-\infty}^{t_l(\theta)} g(t/\theta) dt = 1 - \alpha$  et  $\int_{t_l(\theta)}^{+\infty} g(t/\theta) dt = \alpha$



$$P(\hat{\theta} \geq t_l(\theta_0)) = \alpha$$

dans  $\alpha\%$  des cas, l'affirmation  $\theta_0 \leq \theta_l(\hat{\theta})$  est aléatoirement vraie

dans  $(1-\alpha)\%$  des cas, l'affirmation  $\theta_0 \leq \theta_l(\hat{\theta})$  est aléatoirement fausse

$\alpha$  = niveau de confiance (C.L.)

$\theta_l$  = limite supérieure au niveau de confiance  $\alpha$

## **L'approche classique donne un intervalle incorrect dans certains cas pathologiques:**

### **1.Cas d'une mesure proche de la limite physique de la variable**

**Exemples :**

**Sinus compatible avec des valeurs supérieures à 1 à la limite des erreurs de mesure,**

**Masse compatible avec des valeurs négatives à la limite des erreurs de mesure,**

### **2.Cas d'un taux de comptage faible et proche du bruit de fond**

**Exemple :**

**Mise en évidence d'occurrences d'un processus rare ou encore inobservé, sachant que d'autres processus existent qui forment un bruit de fond ne pouvant être séparés du processus recherché - ils se manifestent par des observations compatibles. A condition de pouvoir calculer l'espérance mathématique du nombre d'occurrences du bruit de fond, le signal se manifestera comme un excès statistiquement significatif d'occurrences en plus du bruit de fond.**

Cas d'une mesure proche de la limite physique de la variable

En toute généralité (par changement de variable : translation / renversement de signe / changement d'échelle) :

Domaine physique  $\theta > 0$  et erreur de mesure standard  $\sigma = 1$

# Construction des ceintures de Neyman

## La ceinture supérieure

$$\theta_l(t) \equiv t_l(\theta)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t_l(\theta)} e^{-\frac{(t-\theta)^2}{2}} dt = 1 - \alpha \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_l(\theta)}^{+\infty} e^{-\frac{(t-\theta)^2}{2}} dt = \alpha$$

## Les ceintures centrées

$$\theta_b(t) \equiv t_a(\theta) \quad \text{et} \quad \theta_a(t) \equiv t_b(\theta)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_a}^{t_b(\theta)} e^{-\frac{(t-\theta)^2}{2}} dt = \alpha$$

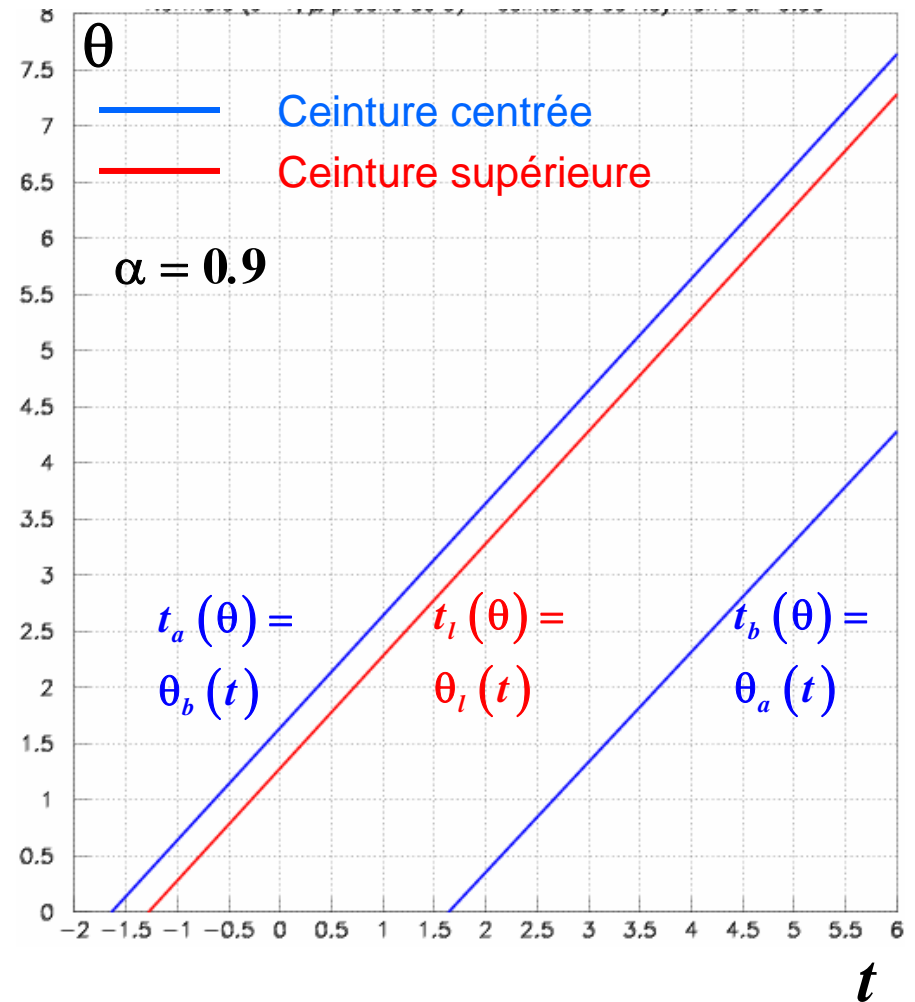
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t_a(\theta)} e^{-\frac{(t-\theta)^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_b(\theta)}^{+\infty} e^{-\frac{(t-\theta)^2}{2}} dt = \frac{1-\alpha}{2}$$

$$t_a(0) = -1.645$$

$$t_b(0) = +1.645$$

$$t_l(0) = -1.282$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t_l(\theta)} e^{-\frac{(t-\theta)^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t_l(\theta)-\theta} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1 - \alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t_l(0)} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \Rightarrow t_{a,b,l}(\theta) = t_{a,b,l}(0) + \theta$$



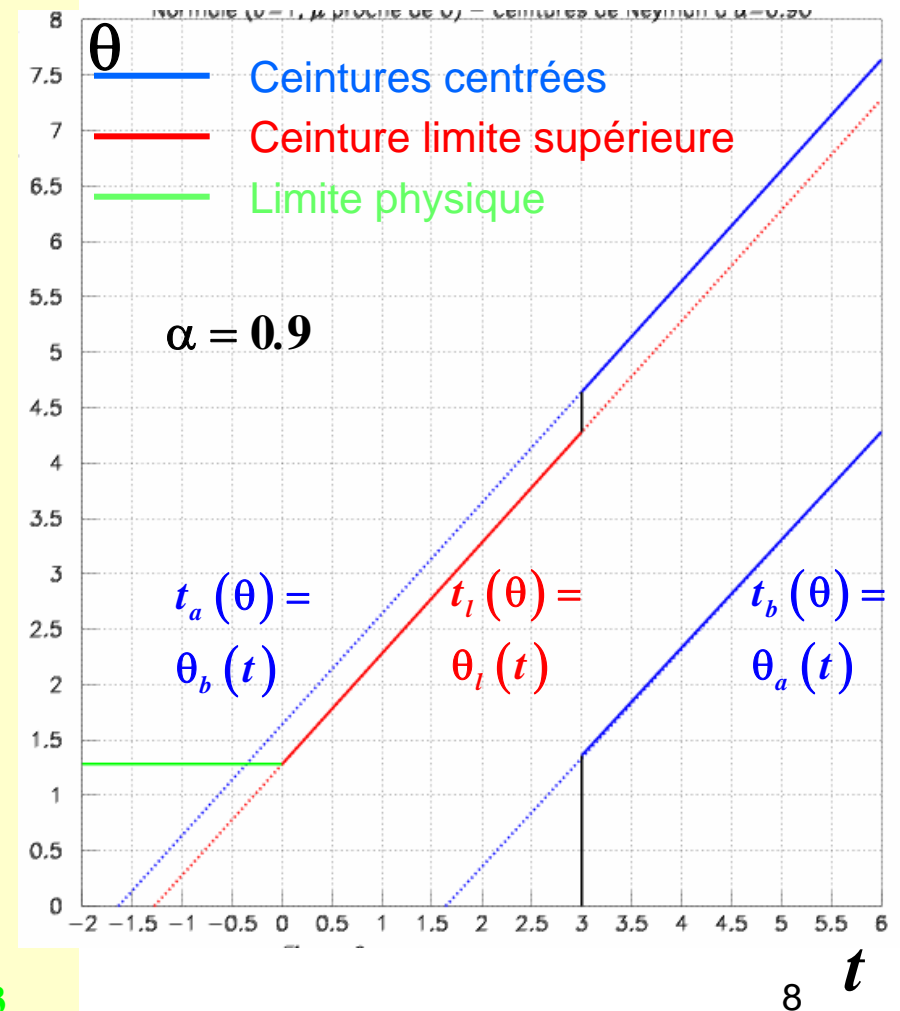
## Ceintures hybrides de Neyman

- Si  $\hat{\theta} = t > 3 (\sigma = 1)$  :  
 légitime de considérer  $\theta > 0$   
 utiliser les ceintures centrées  $\theta_a(t), \theta_b(t)$   
 définir un intervalle de confiance  $\theta_0 \in [\theta_a(\hat{\theta}), \theta_b(\hat{\theta})]$

si  $\hat{\theta} = 4 : P(\theta_0 \in [2.3, 5.6]) = \alpha = 0.9$

- Si  $\hat{\theta} = t < 3 (\sigma = 1)$  :  
 légitime de considérer  $\theta$  compatible avec 0  
 utiliser la ceinture supérieure  $\theta_l(t)$   
 définir comme limite supérieure  $\theta_0 \leq \theta_l(\hat{\theta})$   
 si  $\hat{\theta} = 1 : P(\theta_0 < 2.2) = \alpha = 0.9$

- Si  $\hat{\theta} = t < 0$   
 légitime de considérer  $\hat{\theta} = 0$   
 définir comme limite supérieure :  $\theta_0 \leq \theta_l(0) = 1.3$





## Ceintures hybrides de Neyman: Ou est le problème ?

Aucun problème du point de vue de la statistique si la décision de définir un intervalle ou une limite est prise a priori.

Mais la décision a priori risque d'être dépourvue de sens

- définir une limite supérieure quand la valeur s'avère clairement non nulle
- définir un intervalle couvrant un domaine non physique

Pourquoi ne pas prendre la décision a posteriori ?

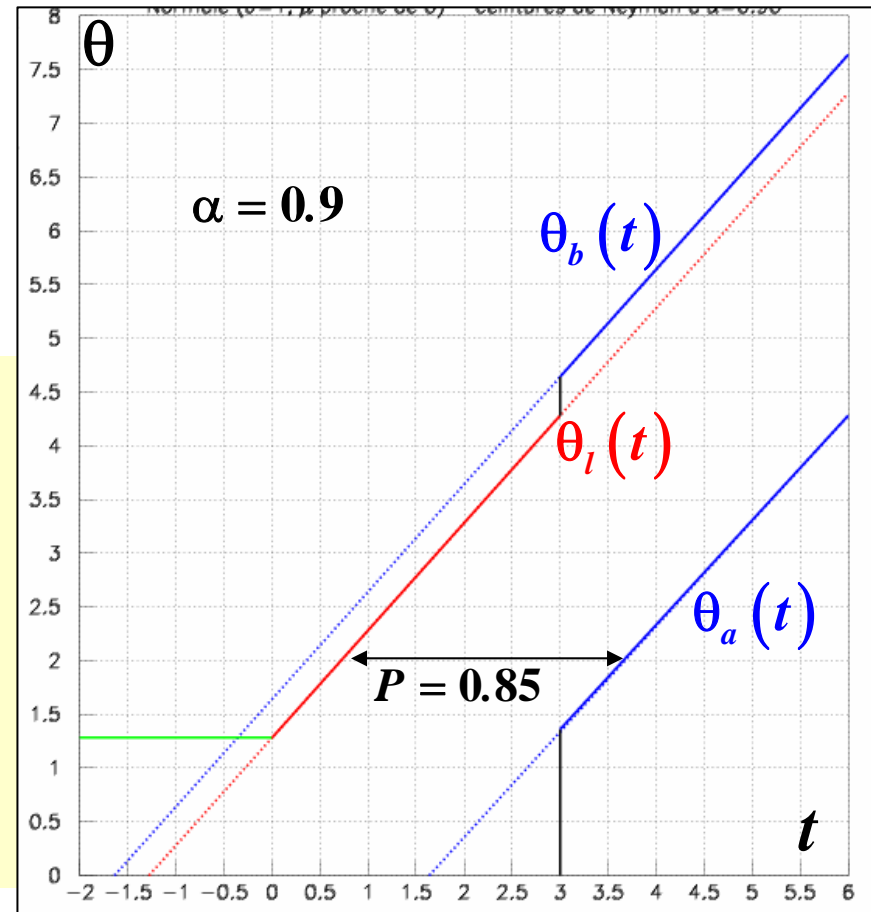
## Ceintures hybrides de Neyman : critique de la décision a posteriori

- Si  $\hat{\theta} > 3$  :  $\theta_0 \in [\theta_a(\hat{\theta}), \theta_b(\hat{\theta})]$  ——— (blue)
- Si  $0 < \hat{\theta} < 3$  :  $\theta_0 \leq \theta_l(\hat{\theta})$  ——— (red)
- $\hat{\theta} < 0$  :  $\theta_0 < \theta_s(0)$  ——— (green)

Le domaine du plan  $(\theta, t)$  ne correspond plus à un niveau de confiance  $\alpha$

La couverture en probabilité n'est plus correcte

Pour  $\theta=2$  : couverture  $=\alpha-(1-\alpha)/2=0.85$



Remarque : le fait de changer de type de ceinture à un nombre d'écart types différents de 3 ou de travailler à un autre niveau de confiance que 0.9 ne change rien à la réalité du problème

# Méthode de Feldman – Cousins

Nouveau principe d'ordonnement a priori de l'infinité d'intervalles  $[t_a(\theta), t_b(\theta)]$

## Règles:

1 • Par définition :  $P(t \in [t_a(\theta), t_b(\theta)]) = \int_{t_b(\theta)}^{t_a(\theta)} f(t/\theta) dt = \alpha$

2 • Le rapport de vraisemblance  $R(t) = \frac{P(t/\theta)}{P(t/\theta^*(t))}$  est maximum

$\theta^*(t)$  est la valeur de  $\theta$  qui maximise  $P(t/\theta)$  dans le domaine physique étant donné  $t$

Si la valeur  $\hat{\theta}$  de  $t$  se trouve dans le domaine physique :  $\theta^* = \hat{\theta}$

Si la valeur  $\hat{\theta}$  de  $t$  se trouve hors du domaine physique :  $\theta^* =$  valeur limite de  $\theta$

## Méthode de Feldman – Cousins

Application des règles à la mesure proche de la limite physique 0 et affectée d'une erreur standard 1

### Règles:

1 • Par définition :  $P(t \in [t_a(\theta), t_b(\theta)]) = \int_{t_b(\theta)}^{t_a(\theta)} N(t/\theta, 1) dt = \alpha$

2 • Le rapport de vraisemblance  $R(t) = \frac{N(t/\theta, 1)}{N(t/\theta^*(t), 1)}$  est maximum

$\theta^*(t)$  est la valeur de  $\theta$  qui maximise  $N(t/\theta, 1)$  dans le domaine physique,  $t > 0$

$$\begin{aligned} \text{si } \hat{\theta} \geq 0 : \theta^* = t = \hat{\theta} &\Rightarrow N(t/t, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} &\Rightarrow R(t) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(t-\theta)^2}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}} = e^{-\frac{1}{2}(t-\theta)^2} \\ \text{si } \hat{\theta} \leq 0 : \theta^* = 0 &\Rightarrow N(t/0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} &\Rightarrow R(t) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(t-\theta)^2}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}} = e^{-\frac{1}{2}(\theta^2 - 2t\theta)} \end{aligned}$$

# Construction de la ceinture de Feldman – Cousins

On définit  $t_a(\theta)$  et  $t_b(\theta)$  en itérant sur un nombre discret de valeurs de  $\theta$  et en résolvant numériquement le système

$$\int_{t_a(\theta)}^{t_b(\theta)} N(t|\theta, 1) = \alpha$$

avec

$$R(t_a(\theta)|\theta) = R(t_b(\theta)|\theta)$$

$$R(t) = e^{-\frac{1}{2}(t-\hat{\theta})^2} \quad \text{si } t = \hat{\theta} \geq 0$$

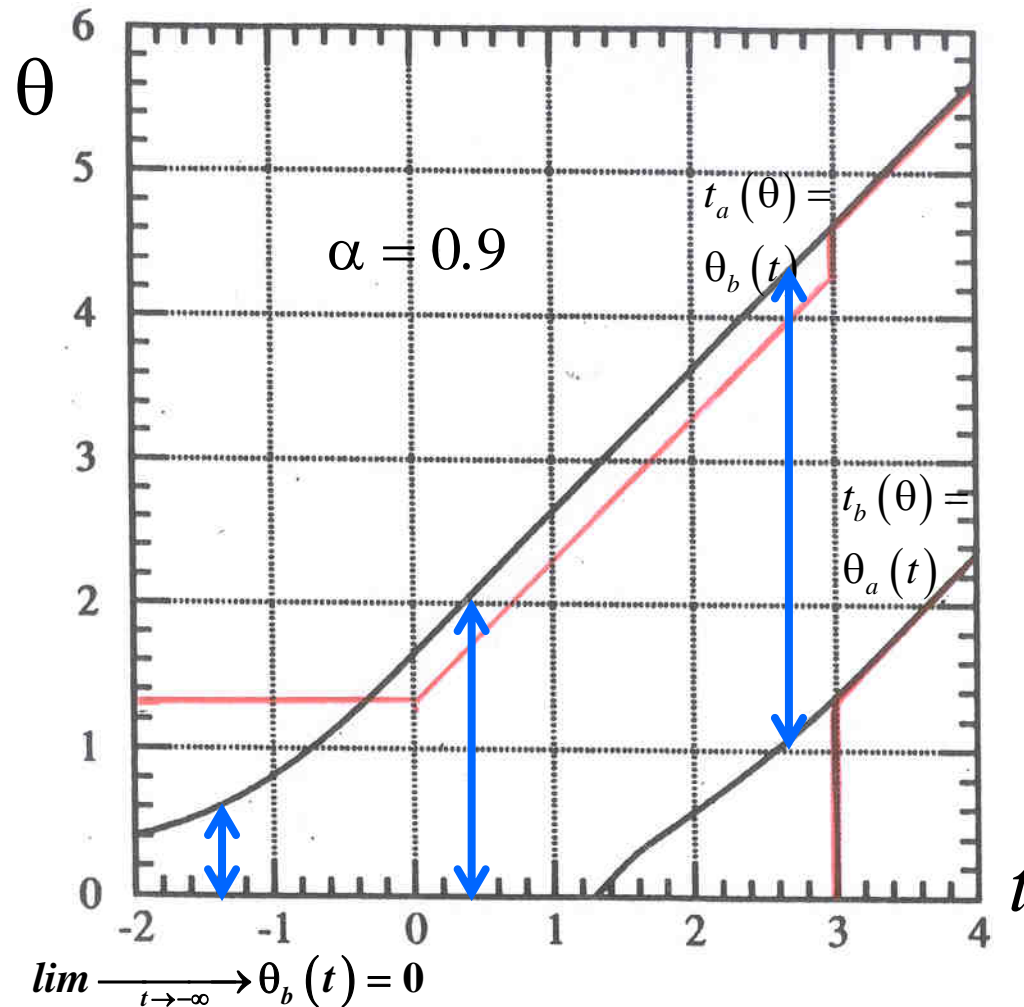
$$R(t) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(t-\hat{\theta})^2}}{e^{-\frac{t^2}{2}}} = e^{-\frac{1}{2}(\hat{\theta}^2 - 2t\hat{\theta})} \quad \text{si } t = \hat{\theta} \leq 0$$

Outil de calcul : la fonction  $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy$  disponible dans les bibliothèques mathématiques.

On démontre facilement que  $\int_{x_1}^{x_2} N(x|\mu, \sigma^2) dx = \frac{1}{2} \left( \text{erf}\left(\frac{x_2 - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right) - \text{erf}\left(\frac{x_1 - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right) \right)$

## Ceinture de Feldman – Cousins

Mesure proche de la limite physique 0 et affectée d'une erreur standard 1



— Feldman - Cousins  
 — Neyman hybride

Si  $\hat{\theta} = 2.6, P(\theta_0 \in [1.0, 4.4]) = 0.9$

Si  $\hat{\theta} = 0.4, P(\theta_0 < 2.0) = 0.9$

Si  $\hat{\theta} = -1.4, P(\theta_0 < 0.5) = 0.9$

Pour les grandes valeurs de  $t$ ,  
 les ceintures sont identiques

Mais l'intervalle de confiance n'est jamais nul, quelle que soit la valeur  $\hat{\theta}$  prise part  $t$

## Cas d'un taux de comptage faible et proche du bruit de fond

### Notations :

$\alpha$  : niveau de confiance

$s$  : le nombre d'événements de signal, variable continue dont on doit mesurer l'intervalle de confiance ou la limite supérieure au niveau de confiance  $\alpha$ ,

$s_0$  : la vraie valeur inconnue de  $s$

$b$  : valeur moyenne du nombre d'événements de bruit de fond attendu, nombre réel connu,

$n$  : l'estimateur du nombre entier d'événements observés (bruit + signal)

$\hat{n}$  : la valeur entière prise par  $n$

$n_a(s)$  : la valeur minimale de  $n$  de la ceinture centrée de Neyman au niveau de confiance  $\alpha$  en fonction de  $s$  pour la valeur attendue de  $b$

$n_b(s)$  : la valeur maximale de  $n$  de la ceinture centrée de Neyman

$n_l(s)$  : la valeur de  $n$  dans la ceinture supérieure de Neyman

$s_a(n), s_b(n), s_l(n)$  : les relations inverses de  $n_b(s), n_a(s), n_l(s)$

## Calcul des ceintures centrées de Neyman

Calculer pour un nombre fini de valeurs de  $s$  dans le domaine attendu les contours  $n_a(s)$  et  $n_b(s) \Rightarrow$

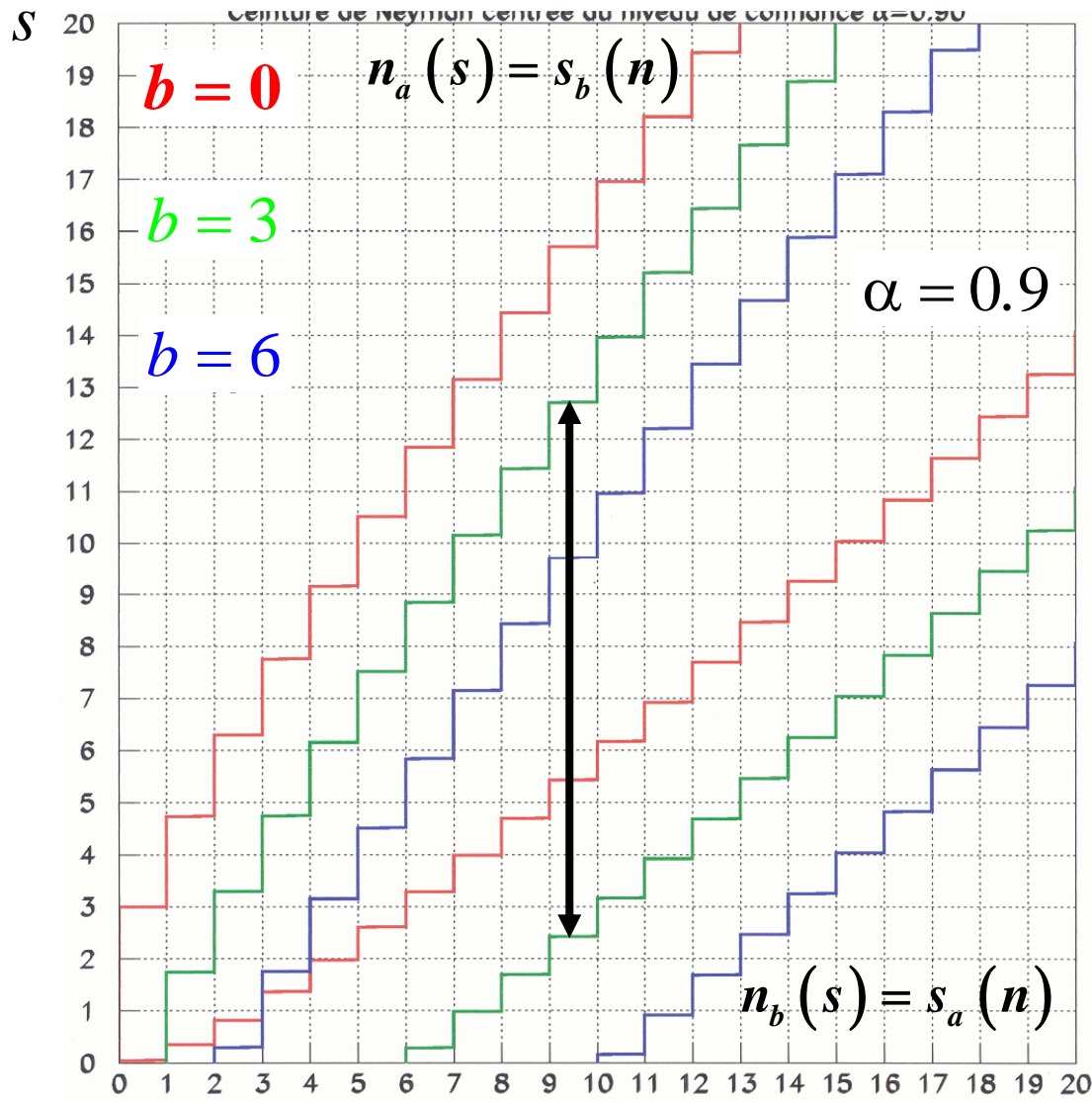
$$\sum_{k=0}^{n_a(s)} P(k/s) > \frac{1-\alpha}{2} \text{ et } \sum_{k=0}^{n_a(s)-1} P(k/s) \leq \frac{1-\alpha}{2} \quad \text{et donc } \sum_{k=n_a(s)}^{n_b(s)} P(k/s) > \alpha$$
$$\sum_{k=n_b(s)}^{\infty} P(k/s) > \frac{1-\alpha}{2} \text{ et } \sum_{k=n_b(s)+1}^{\infty} P(k/s) \leq \frac{1-\alpha}{2}$$

où  $P(k/s) = \frac{(s+b)^k}{k!} e^{-(s+b)}$  est donné par la loi de Poisson.

On note qu'il est impossible d'avoir une couverture en probabilité  $\alpha$  exacte parce que  $n_a, n_b$  sont des variables discrètes.



# Ceintures centrées de Neyman



Si  $b = 3$  et  $n = 9$  :

$$P(s_0 \in [2.4, 12.8]) = 0.9$$

## Calcul de la ceinture limite supérieure de Neyman

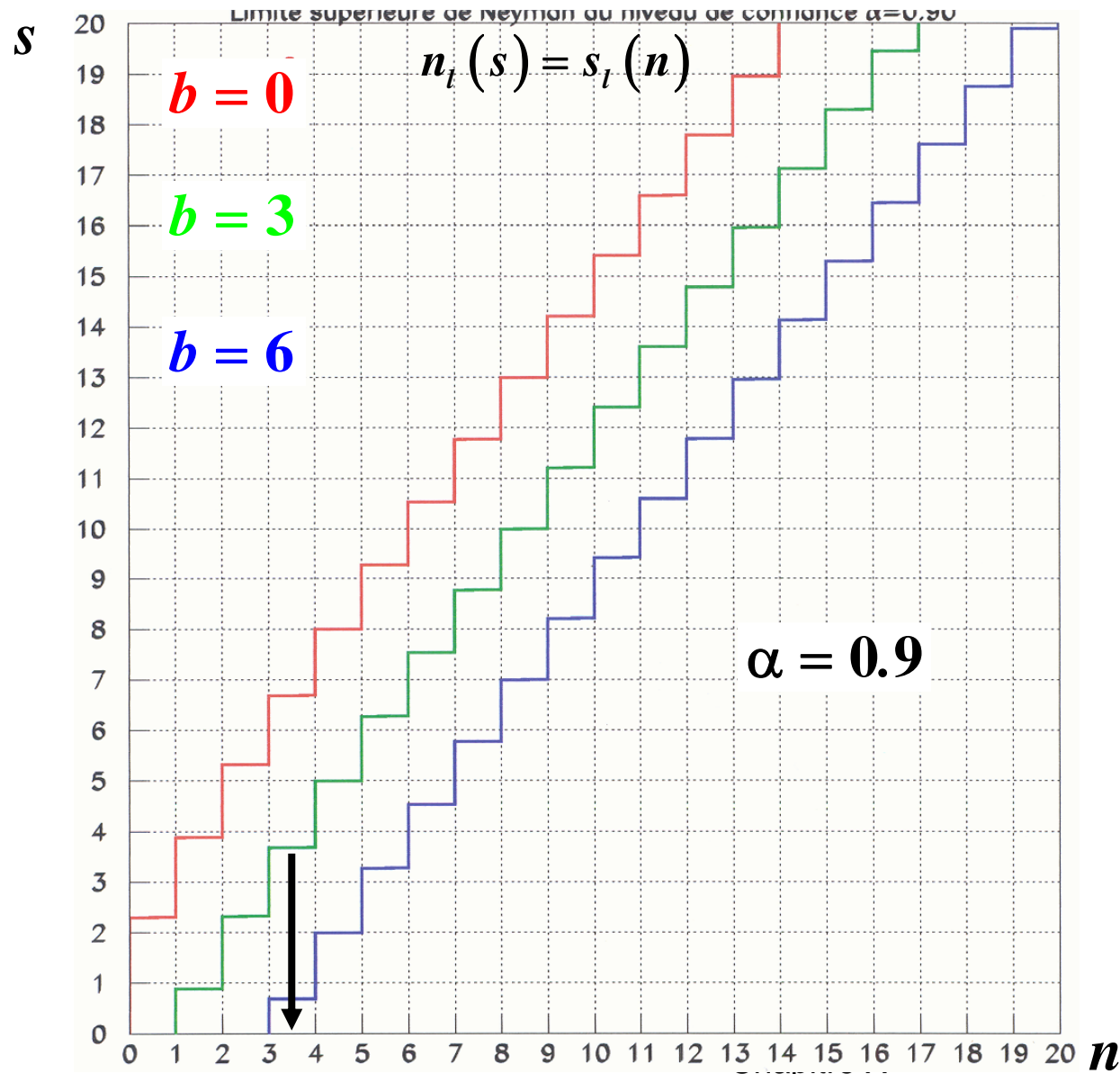
**Calculer pour un nombre fini de valeurs de  $s$  dans le domaine attendu le contours  $n_l(s) \Rightarrow$**

$$\sum_{k=n_l(s)}^{\infty} P(k/s) > 1 - \alpha \text{ et } \sum_{k=n_l(s)+1}^{\infty} P(k/s) \leq 1 - \alpha \text{ et donc } \sum_{k=0}^{n_l(s)} P(k/s) > \alpha$$

**où  $P(k/s) = \frac{(s+b)^k}{k!} e^{-(s+b)}$  est donné par la loi de Poisson.**

**On note qu'il est impossible d'avoir une couverture en probabilité  $\alpha$  exacte parce que  $n_l$  est une variable discrète.**

# Ceinture limite supérieure de Neyman



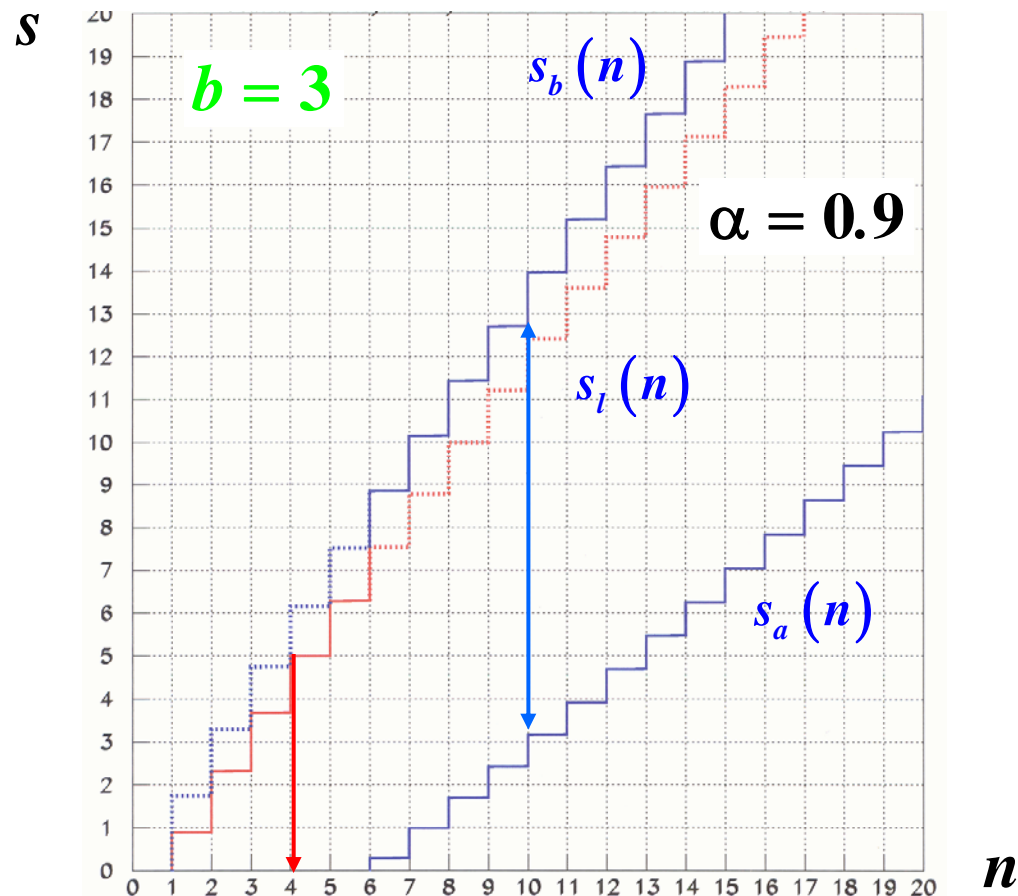
Si  $b = 3$  et  $n = 3$  :

$P(s_0 < 3.7) = 0.9$

# Ceintures hybrides de Neyman

Intervalle de confiance  $s_0 \in [s_a(n), s_b(n)]$  tant que  $s_a(n) > 0 \Rightarrow n \geq 6$

Limite supérieure  $s_0 \leq s_a(n)$  pour  $s_a(n) = 0 \Rightarrow n < 6$



## Ceintures hybrides de Neyman : Ou est le problème ?

Aucun problème du point de vue de la statistique si la décision de définir un intervalle ou une limite est prise a priori.

Mais la décision a priori risque d'être dépourvue de sens

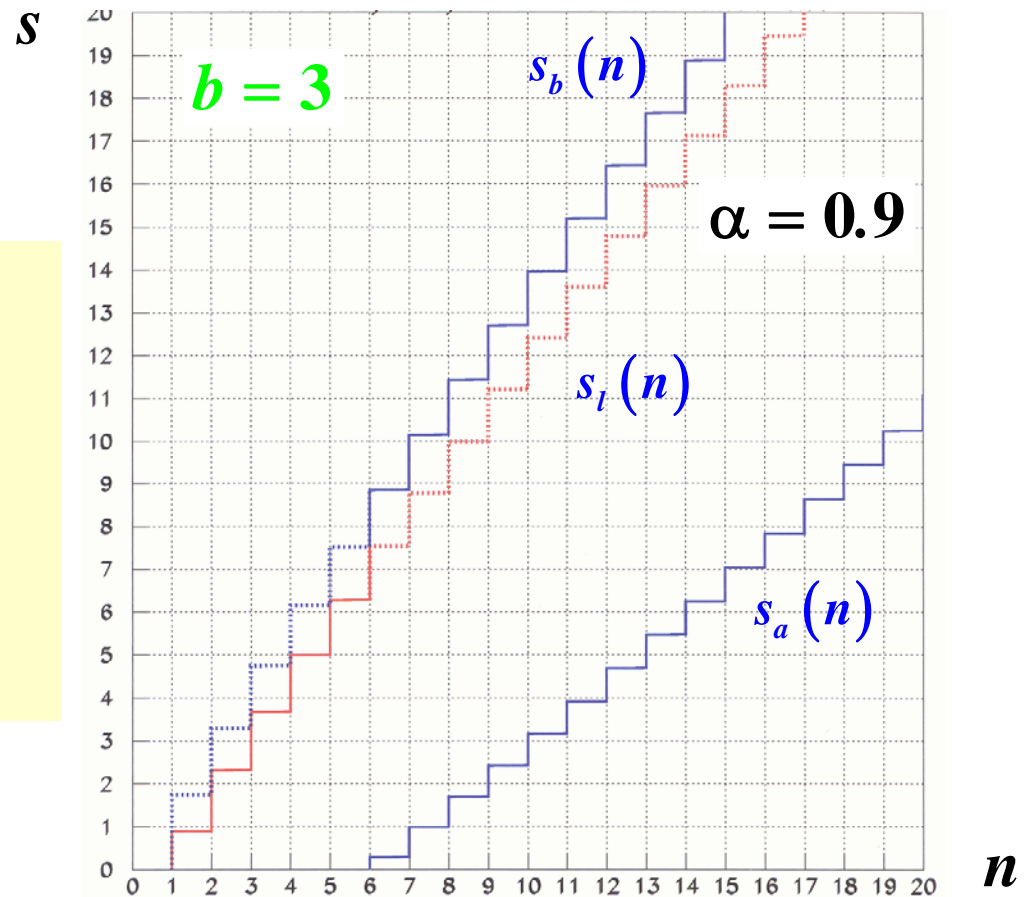
- définir une limite supérieure quand le nombre d'événements de signal s'avère clairement non nulle
- définir un intervalle alors que le nombre d'événements de signal est compatible avec 0.

Pourquoi ne pas prendre la décision a posteriori ?

# Ceintures hybrides de Neyman : critique de la décision a posteriori

Le domaine du plan  $(n,s)$  ne correspond plus à un niveau de confiance  $\alpha$

La couverture en probabilité n'est plus correcte



## Méthode de Feldman – Cousins

### Application des règles au cas d'un taux de comptage faible

**Si  $n > b$  :  $s^* = n - b$**

**Si  $n \leq b$  :  $s^* = 0$**

**Calculer pour un nombre fini de valeurs de  $s$  dans le domaine attendu**

$$P(n/s, b) = \frac{(s+b)^n}{n!} e^{-(s+b)}$$

$$P(n/s^*(n), b) = \frac{(s^*(n)+b)^n}{n!} e^{-(s^*(n)+b)}, \quad s^*(n) = \text{Max}(0, n-b)$$

$$R(n) = \frac{P(n/s, b)}{P(n/s^*, b)}$$

**Sélectionner les valeurs de  $n$  dans l'ordre décroissant de  $R(n)$  jusqu'à ce que**

$$\sum P(n/s) \geq \alpha$$

**Retenir comme limites la plus petite et la plus grande des valeurs de  $n$  retenues**

## Exemple : calcul des limites quand $b = 3$ et $\alpha = 0.9$ pour $s = 0.5$

$n$	$P(n   n_s)$	$n_s^*(n)$	$P(n   n_s^*(n))$	$R(n)$	rang
0	0.030	0.0	0.050	0.607	6
1	0.106	0.0	0.149	0.708	5
2	0.185	0.0	0.224	0.826	3
3	0.216	0.0	0.224	0.963	2
4	0.189	1.0	0.195	0.966	1
5	0.132	2.0	0.175	0.753	4
6	0.077	3.0	0.161	0.480	7
7	0.039	4.0	0.149	0.259	
8	0.017	5.0	0.140	0.121	
9	0.007	6.0	0.132	0.050	
10	0.002	7.0	0.125	0.018	
11	0.001	8.0	0.119	0.006	

$\sum P(n/s = 0.5) = 0.935 \geq 0.9$  pour les 7 valeurs de  $n$  de rang  $R$  les plus élevés  
alors que

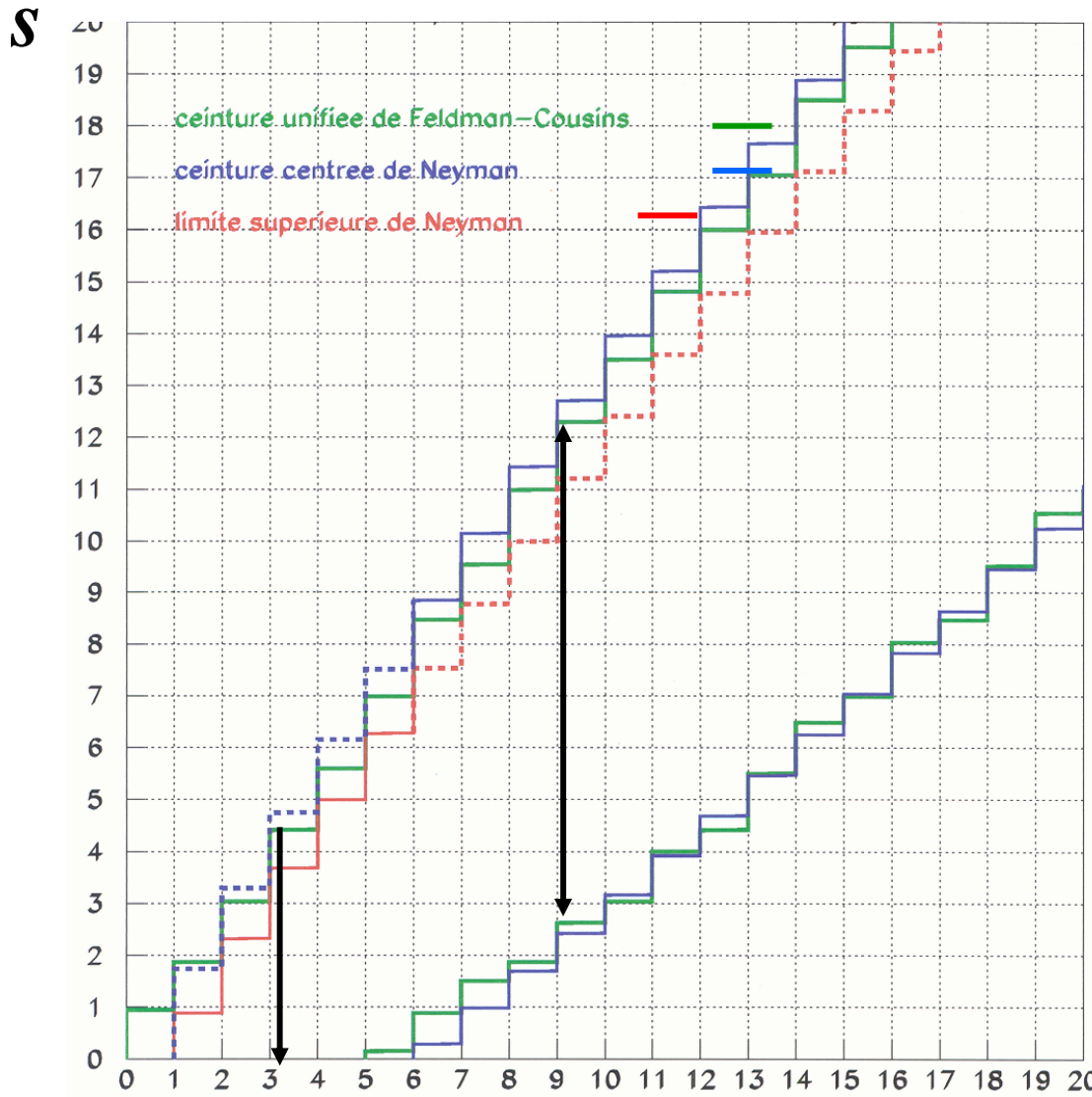
$\sum P(n/s = 0.5) = 0.858 < 0.9$  pour les 6 valeurs de  $n$  de rang  $R$  les plus élevés

$$\Rightarrow n_a(s = 0.5/b = 3, \alpha = 0.9) = 0$$

$$\Rightarrow n_b(s = 0.5/b = 3, \alpha = 0.9) = 6$$



# Exemple de ceinture de Feldman-Cousins pour $b = 3$ et $\alpha = 0.9$



**Si  $b = 3$  et  $n = 9$  :**

$$P(s_0 \in [2.6, 12.3]) = 0.9 \text{ FC}$$

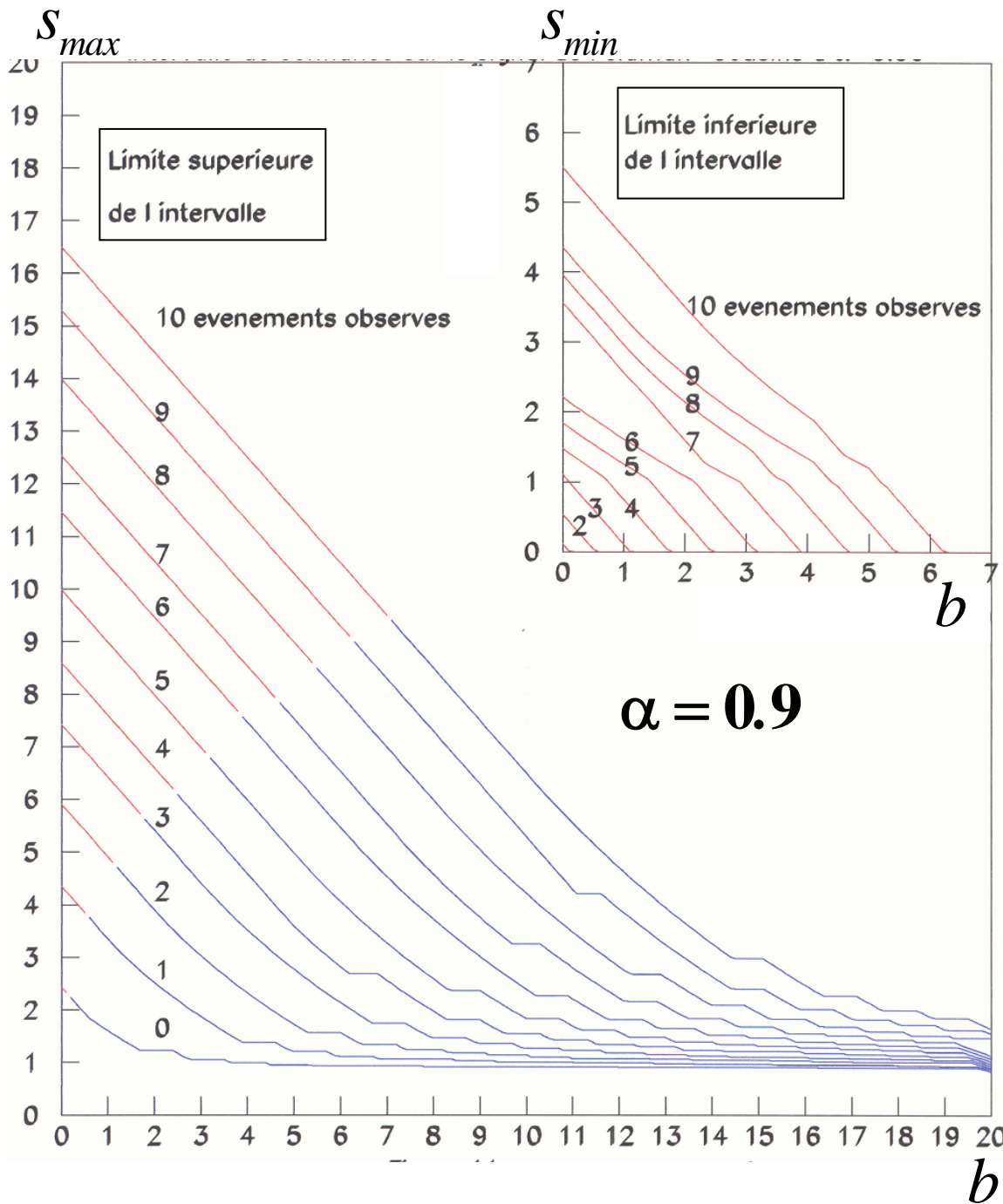
$$P(s_0 \in [2.4, 12.8]) = 0.9 \text{ Neyman}$$

**Si  $b = 3$  et  $n = 3$  :**

$$P(s_0 < 4.5) = 0.9 \text{ FC}$$

$$P(s_0 < 3.7) = 0.9 \text{ Neyman}$$

Pour les grandes valeurs de  $n$ , les ceintures deviennent quasiment identiques



Limites inférieure et supérieure sur le nombre d'événements de signal  $s$  en fonction du nombre d'événements de bruit de fond attendus  $b$  pour un nombre d'événements observés  $n$  variant de 0 à 10 calculés par le méthode de Feldman-Cousins au niveau de confiance  $\alpha=0.9$

**Exemples :**

**si  $b = 4.7$  et  $n = 8$  :**

$$P(s_0 \in [0.7, 9.3]) = 0.9$$

**si  $b = 2.5$  et  $n = 3$  :**

$$P(s_0 < 4.9) = 0.9$$